Solidi assialsimmetrici: tubi, serbatoi, dischi

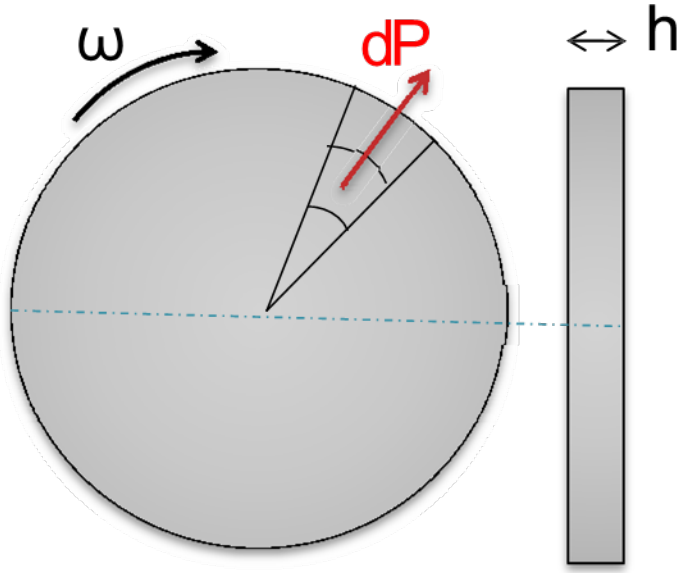
Lecture 16

Dischi in rotazione

- Disco a spessore costante h, in rotazione con velocità angolare costante ω.
- Sul generico elemento per effetto della rotazione agisce la forza centrifuga dP.
- La forza dP è pari al prodotto della massa dell'elemento per l'accelerazione centrifuga.

$$dP = dm\omega^2 r$$

$$dm = \rho dV = \frac{\gamma}{g} dV$$

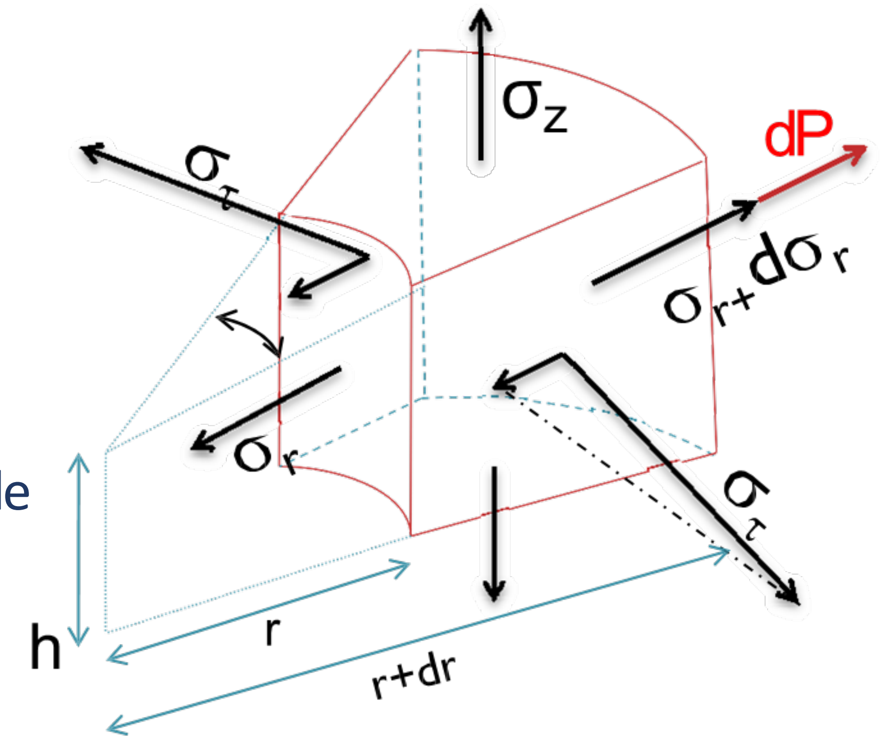


Dischi in rotazione: relazione di equilibrio

- In maniera analoga ai cilindri pressurizzati, riscriviamo l'equazione di equilibrio

$$dP = \frac{\gamma}{g}(h \cdot r \cdot d\phi \cdot dr)\omega^2 r$$

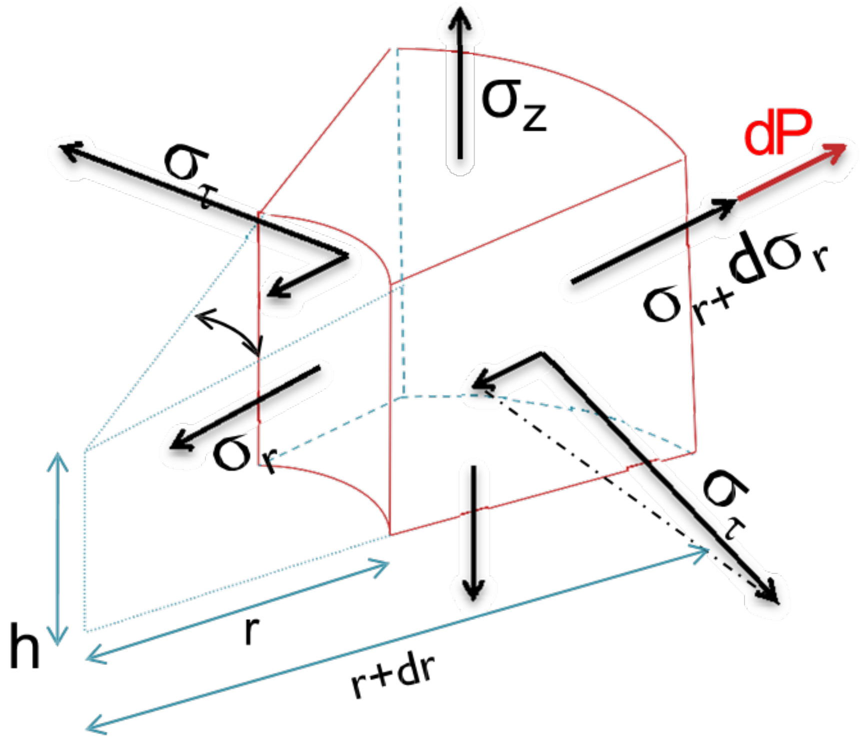
$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t = -\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2$$



- Per la relazione di congruenza e ricordando la definizione delle deformazioni in funzione del solo spostamento radiale *u*

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = -\frac{(1-\nu^2)\gamma}{Eg}\omega^2 r$$

Dischi in rotazione: relazione di equilibrio



- Integrando due volte rispetto ad r,

$$u = -\frac{(1-\nu^2)}{8E}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

- Sostituendo nell'espressioni delle componenti di deformazione e poi nel legame costitutivo, otteniamo

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)r^2$$

$$\sigma_\tau = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(1+3\nu)r^2$$

Disco pieno

- In assenza di sollecitazioni esterne la tensione radiale al raggio esterno va a zero

$$\sigma_{r(r=b)} = 0$$

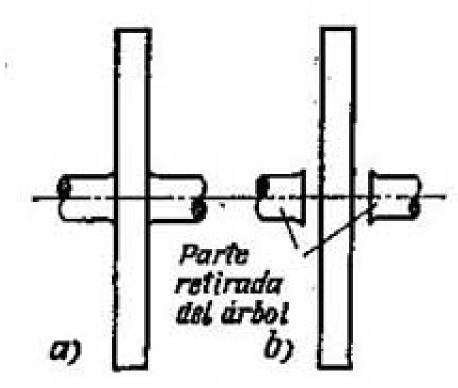
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}[C_1(1+\nu)] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)b^2 = 0$$

$$C_1 = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{8g}b^2\frac{3+\nu}{1+\nu}$$

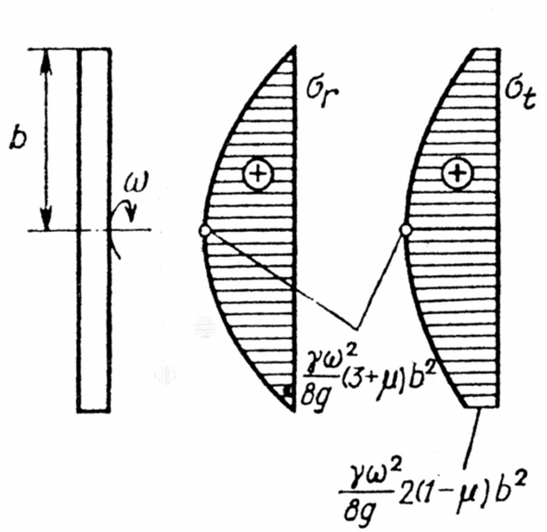
- Se l'albero e il disco formano un corpo unico

  il punto $r = 0$ appartiene al disco

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)(b^2-r^2) \\ \sigma_t = \dfrac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)\left(b^2 - \dfrac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \end{cases}$$



$$C_2 = 0$$



Andamento parabolico
Al centro le componenti sono uguali

Disco forato

- In assenza di sollecitazioni esterne la tensione radiale al raggio esterno va a zero:

$$\sigma_{r(r=b)} = 0 \qquad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\frac{1}{b^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)b^2 = 0$$

- In assenza di sollecitazioni interne la tensione radiale al raggio esterno va a zero:

$$\sigma_{r(r=a)} = 0 \qquad \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\frac{1}{a^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2}{8g}(1+3\nu)a^2 = 0$$

$$C_1(1+\nu) = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)(b^2+a^2)$$

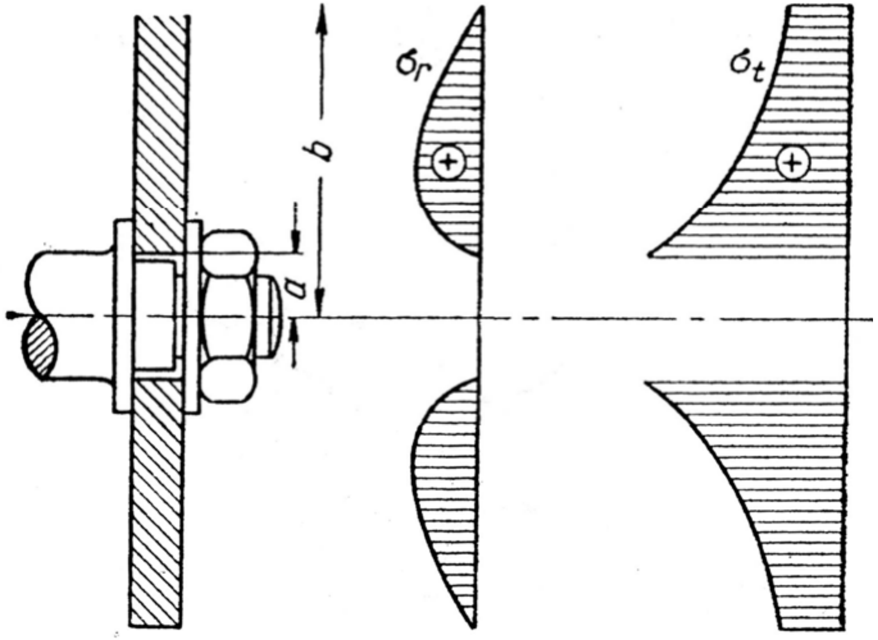
$$C_2(1-\nu) = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)a^2b^2$$

Disco forato

- **Stato di sforzo:**

Diagrammi per $b = 5a$

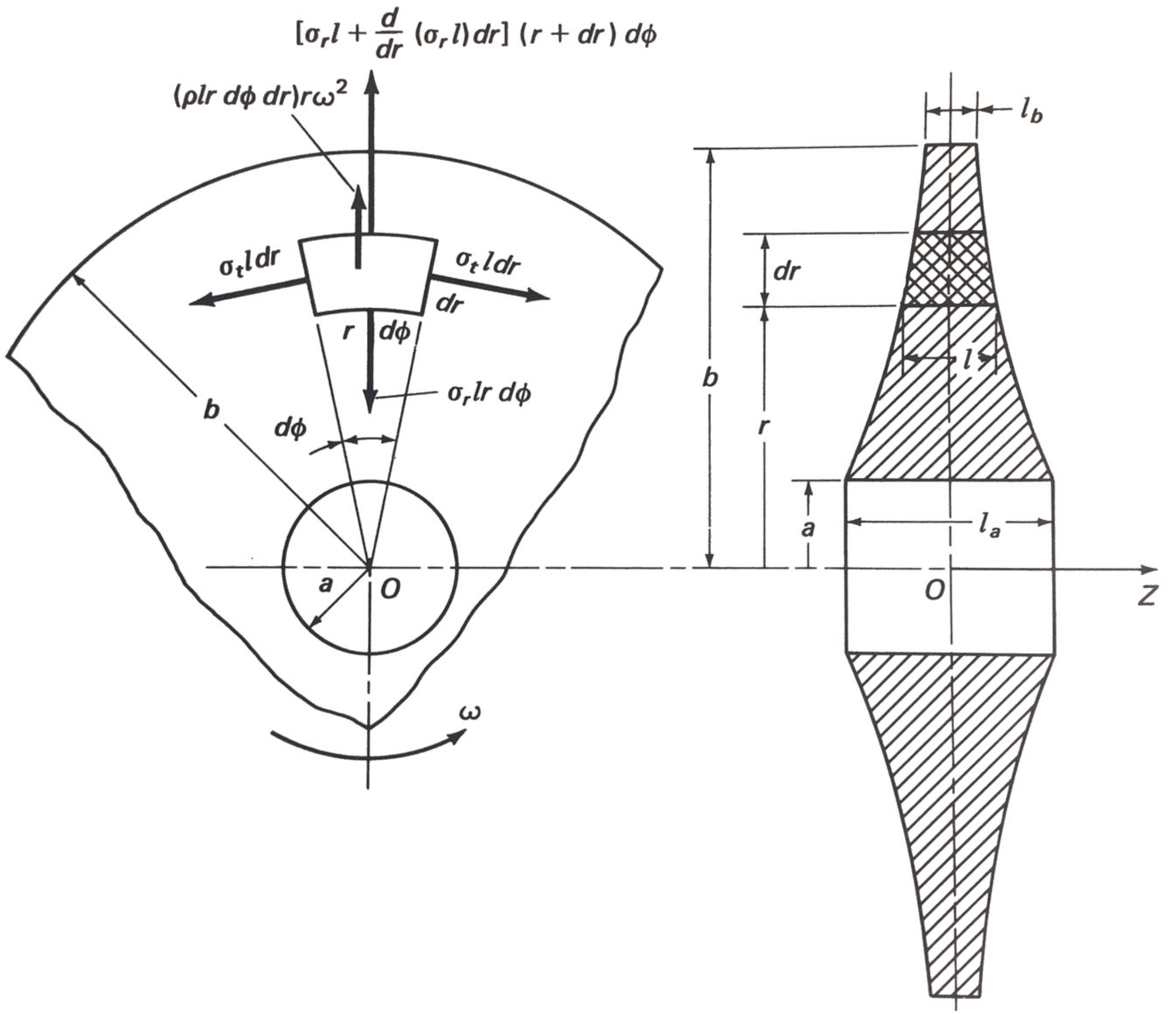
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)\left(b^2 + a^2 - \dfrac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right) \\ \sigma_t = \dfrac{\gamma\omega^2}{8g}(3+\nu)\left(b^2 + a^2 - \dfrac{a^2 b^2}{r^2} - \dfrac{1+3\nu}{3+\nu} - r^2\right) \end{cases}$$



- Sforzi massimi sempre in prossimità della parte centrale del disco

Disco a uniforme resistenza

- Riscriviamo l'equazione di equilibrio considerando che lo spessore del disco non sarà costante $l = l(r)$



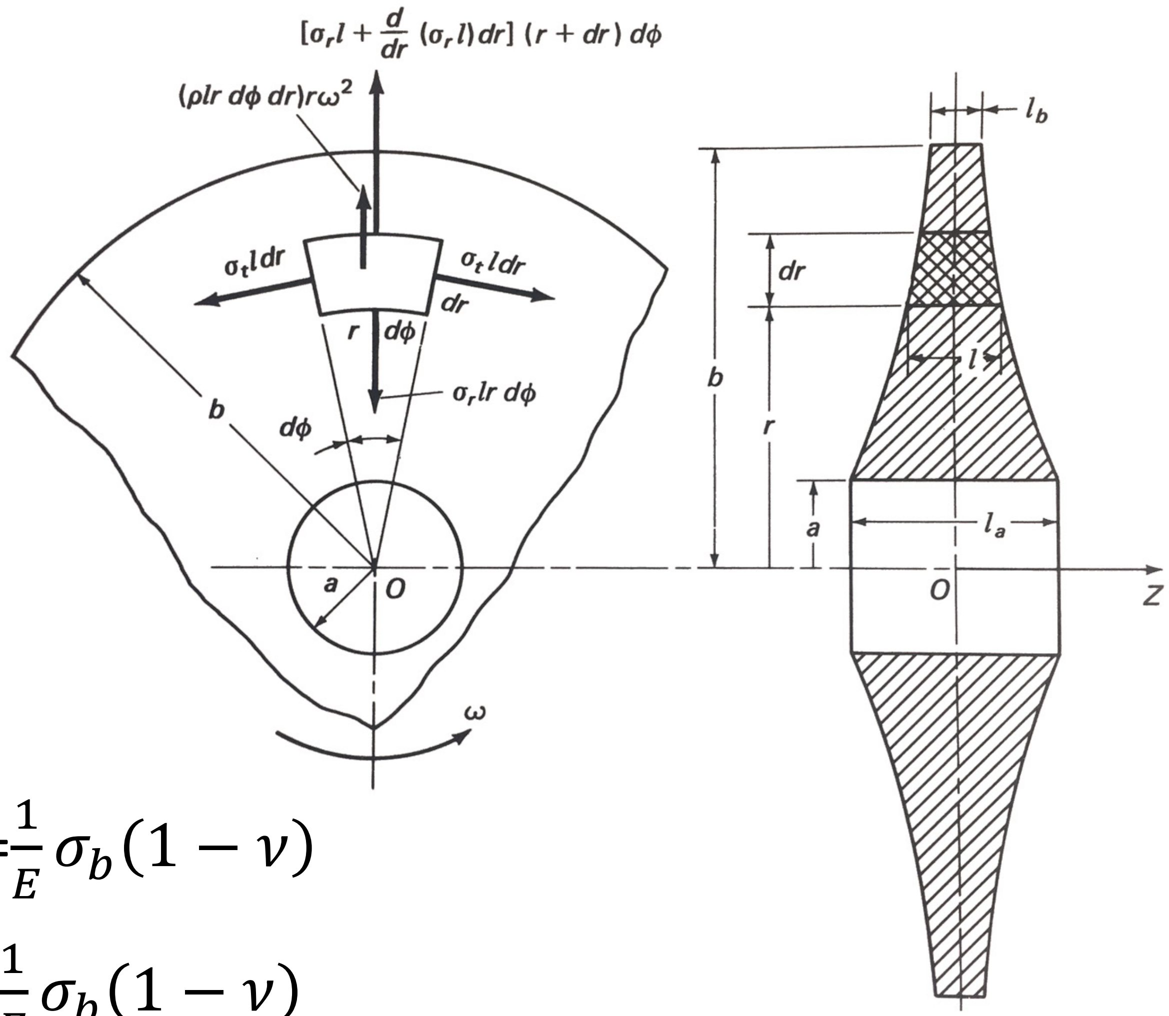
$$-2\sigma_t l dr \frac{d\phi}{2} - \sigma_r l r d\phi$$
$$+ \left[\sigma_r l r d\phi + \sigma_r l dr d\phi + r\frac{d}{dr}(\sigma_r l) dr d\phi + \frac{d}{dr}(\sigma_r l) dr^2 d\phi\right]$$
$$+ \frac{\gamma\omega^2}{g} l r^2 d\phi dr = 0$$

$$-\sigma_t l + \sigma_r l + r\frac{d}{dr}(\sigma_r l) + \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 l = 0$$

Disco a uniforme resistenza

- Imponiamo la condizione di uniforme resistenza:
  Si definisce disco di uniforme resistenza un disco in cui in ogni punto la tensione radiale è uguale alla tensione circonferenziale ed è costante

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_b$$



- Verifica della congruenza

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \qquad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

$$u = \varepsilon_t r$$

$$\varepsilon_r = \frac{d(\varepsilon_t r)}{dr}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\tau) = \frac{1}{E}\sigma_b(1-\nu)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) = \frac{1}{E}\sigma_b(1-\nu)$$

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}\left[\frac{r}{E}\sigma_b(1-\nu)\right] = \frac{1}{E}\sigma_b(1-\nu)$$

Disco a uniforme resistenza

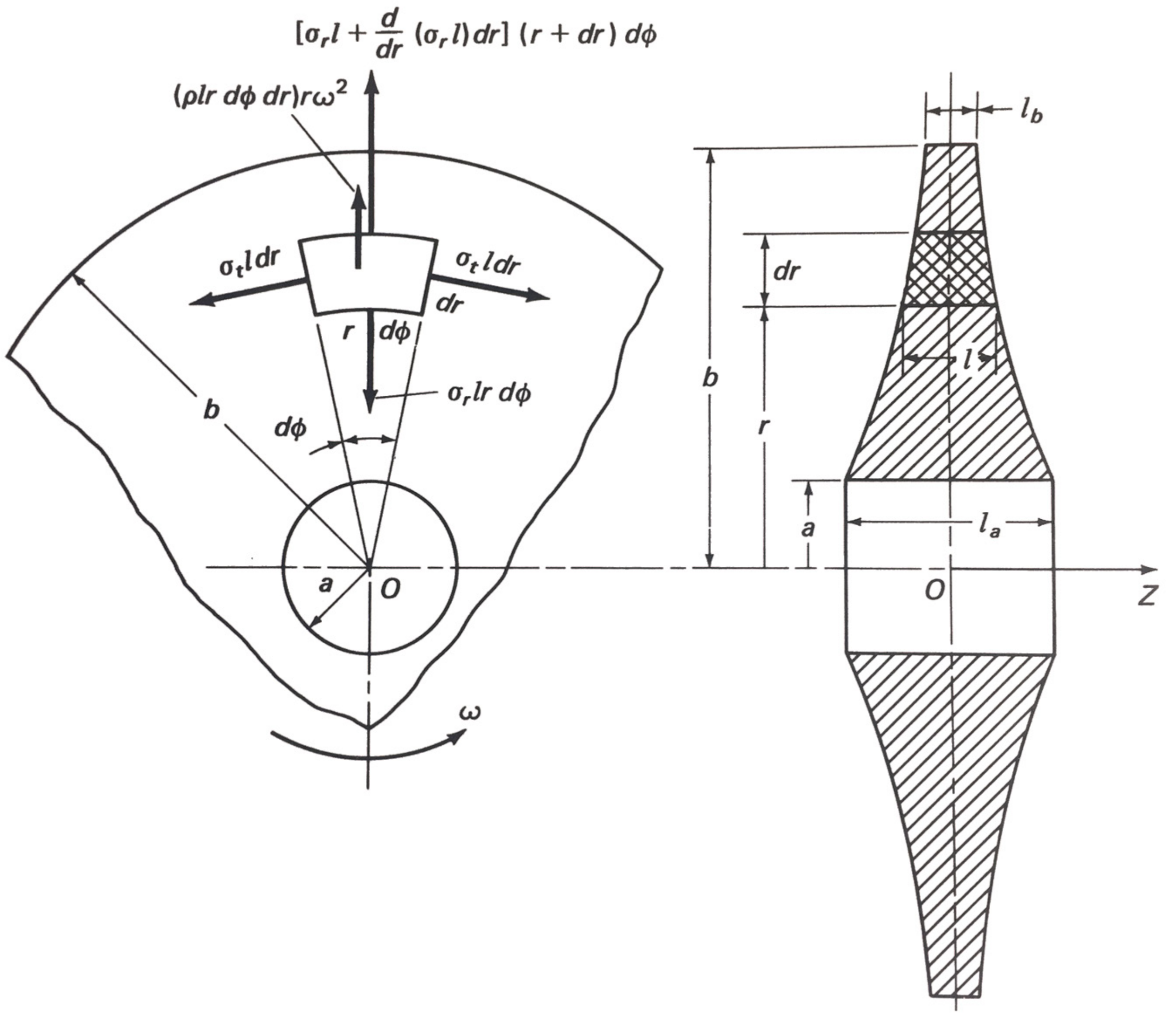
- Imponiamo la condizione di uniforme resistenza: Si definisce disco di uniforme resistenza un disco in cui in ogni punto la tensione radiale è uguale alla tensione circonferenziale ed è costante.

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_b$$

$$\sigma_b r \frac{dl}{dr} + \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 l = 0$$

$$\ln l = -\frac{\gamma \omega^2}{2 g \sigma_b} r^2 + \ln C$$

$$l = C e^{-\frac{\gamma \omega^2}{2 g \sigma_b} r^2}$$



Disco a uniforme resistenza

- Condizione al contorno

$$l = l_b \quad \text{per} \quad r = b$$

$$C = l_b e^{\frac{\gamma \omega^2}{2 g \sigma_b} b^2}$$

$$l = l_b e^{\frac{\gamma \omega^2}{2 g \sigma_b}(b^2 - r^2)}$$