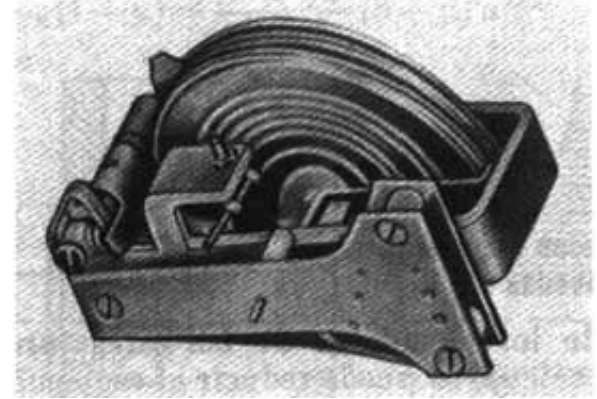


# Solidi assialsimmetrici: tubi, serbatoi, dischi

Lecture 16

# Teoria delle membrane

- Una delle dimensioni (lo spessore) è considerevolmente minore delle altre due
- Teoria particolare (o a momenti nulli), si assume che gli sforzi siano uniformemente distribuiti attraverso lo spessore
- Caratterizzata dalla geometria della superficie mediana e dalla legge di variazione dello spessore
- Il comportamento di numerosi componenti la cui superficie mediana è una superficie di rotazione è riconducibili al comportamento di membrane (caldaie, serbatoi, cisterne, etc.)
- Soluzioni tanto più accurate quanto minore è lo spessore rispetto alle altre dimensioni
- Non valida in prossimità di singolarità: linee angolose, incastri, forze e momenti concentrati



# Teoria delle membrane

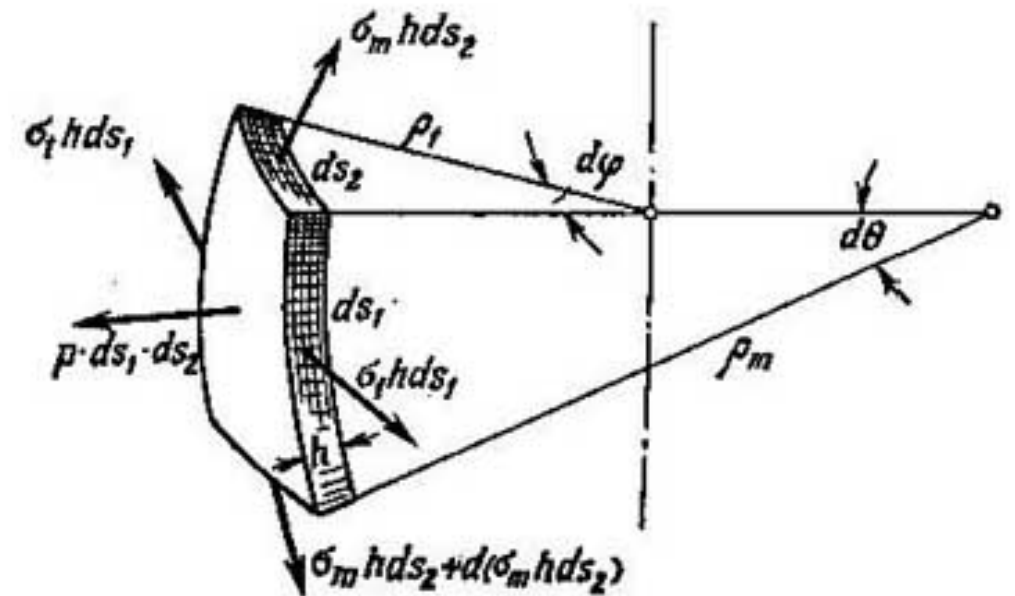
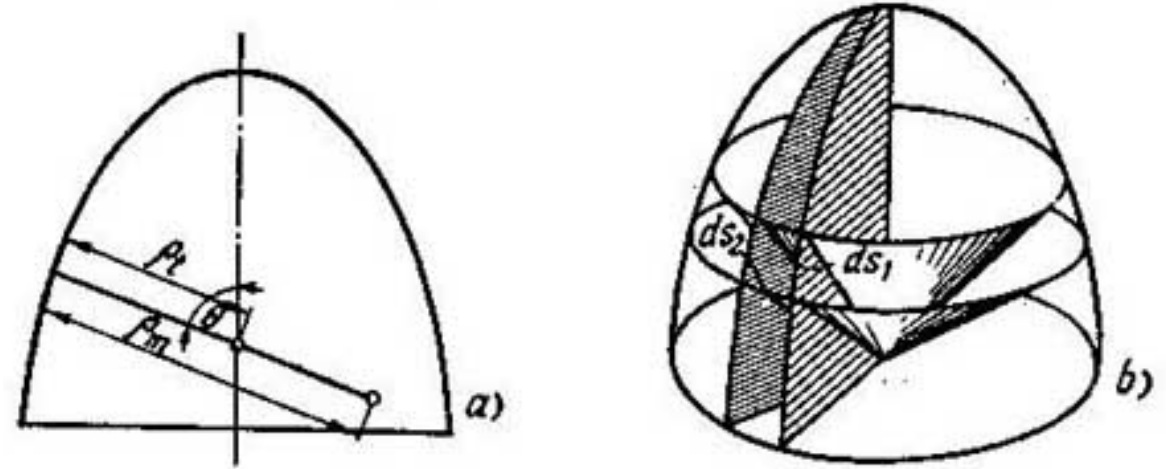
- Equilibrio delle forze lungo la normale alla superficie

$$p ds_1 ds_2 - \sigma_m h ds_2 d\theta - \sigma_t h ds_1 d\varphi = 0$$

$$d\theta = \frac{ds_1}{\rho_m}, \quad d\varphi = \frac{ds_2}{\rho_t}$$

- Equazione di Laplace

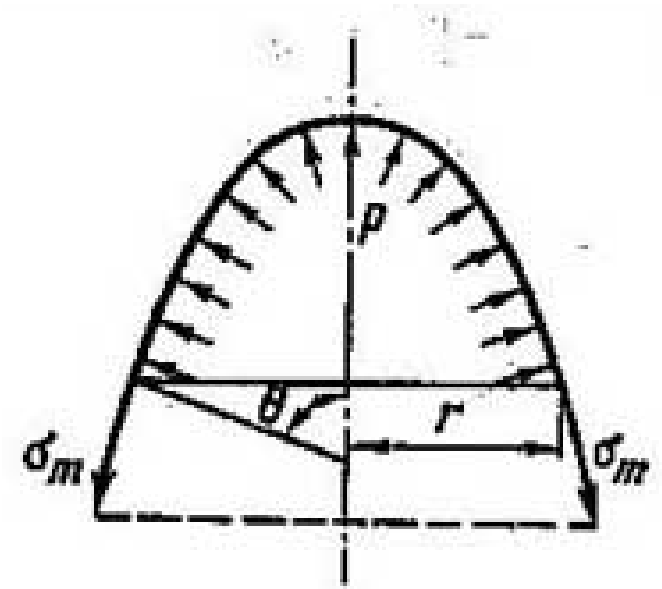
$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}$$



# Teoria delle membrane

- Equilibrio delle forze lungo l'asse di simmetria

$$\sigma_m 2\pi r h \sin \theta = P$$



Terzo sforzo principale trascurabile

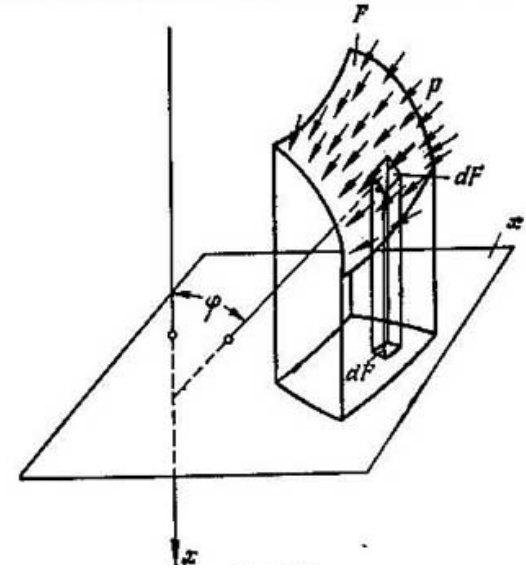
$$0 \leq \sigma_r \leq p$$

$$\sigma_m \sim p \frac{\rho_m}{h} \quad \sigma_r \sim p \frac{\rho_r}{h}$$

# Teoria delle membrane

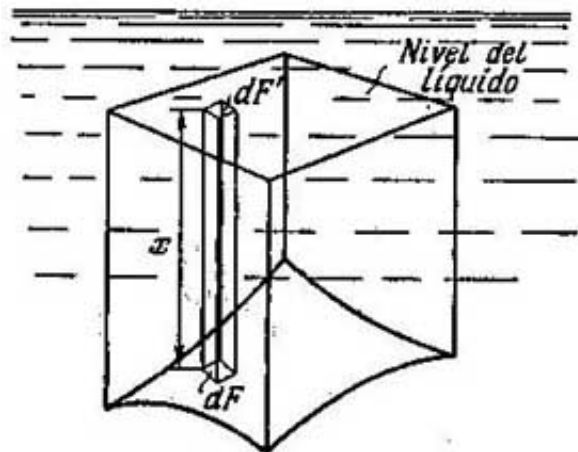
## Teorema 1

$$P_x = \int_F p \cos \varphi dF \quad dF' = dF \cos \varphi \quad P_x = p \int_F dF' = pF'$$



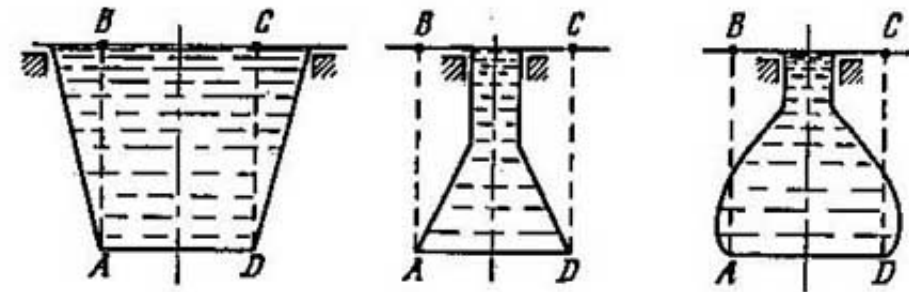
## Teorema 2

Per una superficie soggetta alla pressione di un fluido, la componente verticale delle forze di pressione è uguale al peso del liquido contenuto nel volume sopra la superficie



Su  $dF$ ,

$$dP_x = p dF' = \gamma x dF'$$



# Esempio 1

Recipiente sferico

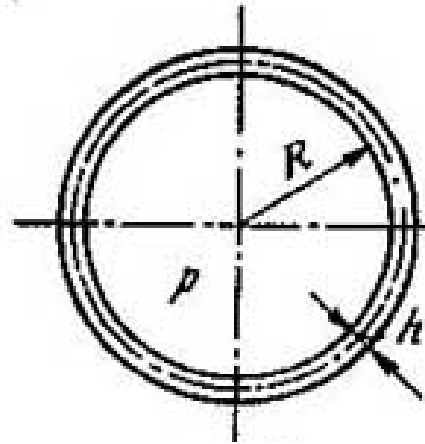
- Raggio  $R$ , spessore  $h$
- Pressione interna  $p$

$$\rho_m = \rho_t = R$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}$$

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}$$

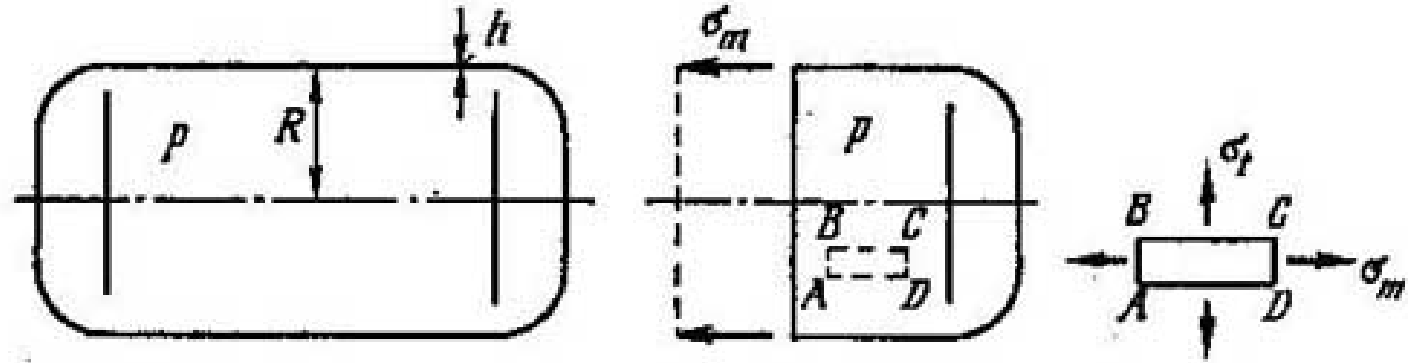
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pR}{2h}$$



## Esempio 2

Recipiente cilindrico

- Raggio del cilindro  $R$ , spessore  $h$
- Pressione interna  $p$



Equilibrio lungo l'asse

$$\sigma_m 2\pi R h = P = p \pi R^2 \quad \sigma_m = \frac{pR}{2h}$$

Dati  $\rho_m = \infty$ ,  $\rho_t = R$ , dall'equazione di Laplace

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h} \quad \sigma_t = \frac{pR}{h}$$

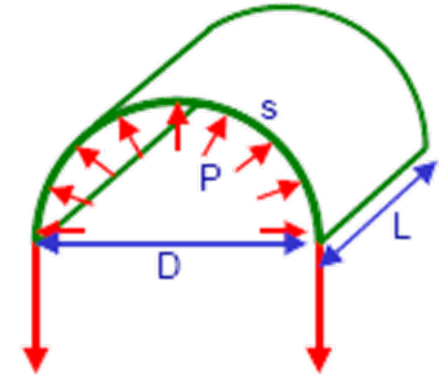
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pR}{h}$$

# Teoria delle membrane: equazioni di Mariotte

- Equilibrio circonferenziale

$$\rho_m = \infty \quad e \quad \rho_t = D/2$$

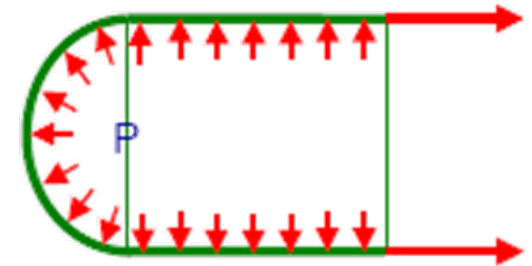
$$\sigma_t = \frac{F}{A} = \frac{pDL}{2sL} = \frac{pD}{2s}$$



- Equilibrio assiale

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad e \quad F = p\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

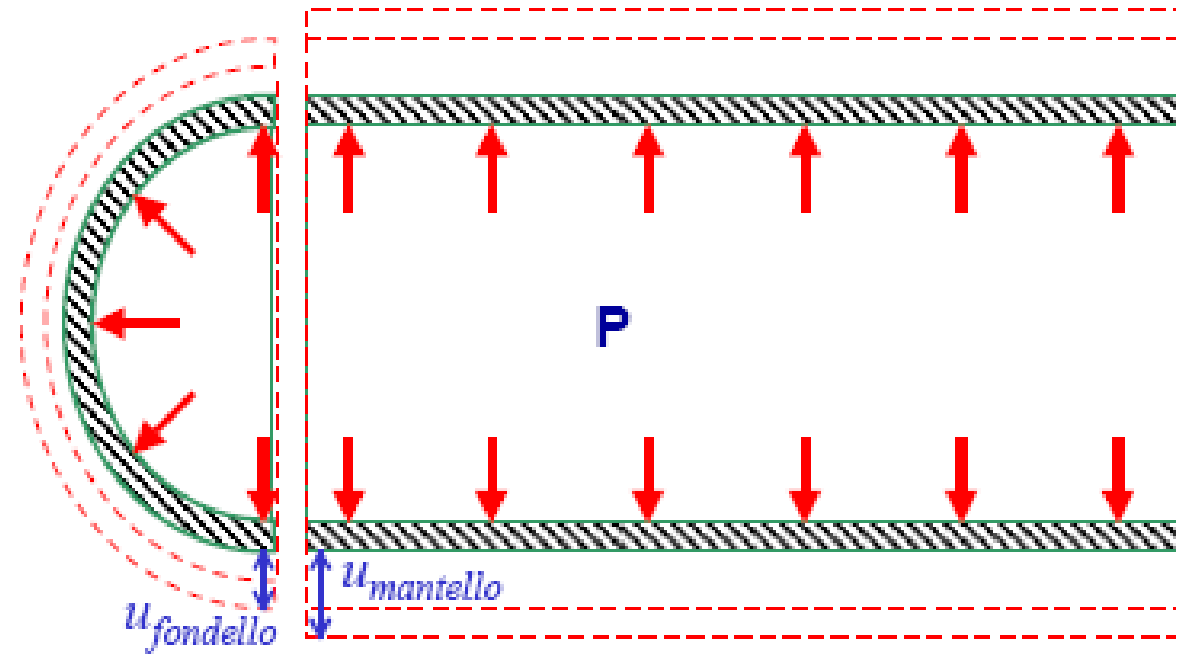
$$\sigma_m = \frac{F}{A} = \frac{p\frac{\pi}{4}D^2}{s2\pi D/2} = \frac{pD}{4s}$$





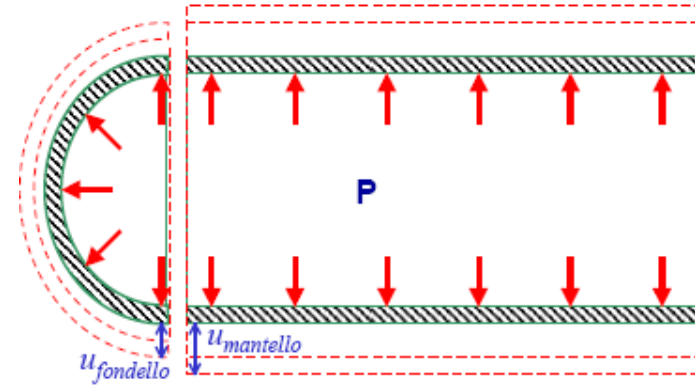
# Interazione fondo-mantello

- Nel fondo e nel mantello di pari spessore le deformazioni circonferenziali **non sono uguali**. Tipicamente il fondo è più rigido (si deforma meno)
- Nelle zone di collegamento nascono delle sovratensioni che garantiscono la congruenza delle deformazioni



# Interazione fondo-mantello

- Congruenza degli spostamenti radiali.
- **Serbatoio cilindrico:**



$$\sigma_t = \frac{pR}{h}$$

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}$$

$$\varepsilon_t^M = \frac{\sigma_t}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_m + \sigma_r) = \frac{pR}{Eh_M} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

- **Fondo emisferico:**

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}$$

$$\varepsilon_t^F = \frac{\sigma_t}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_m + \sigma_r) = \frac{pR}{2Eh_F} (1 - \nu)$$

## Interazione fondo-mantello

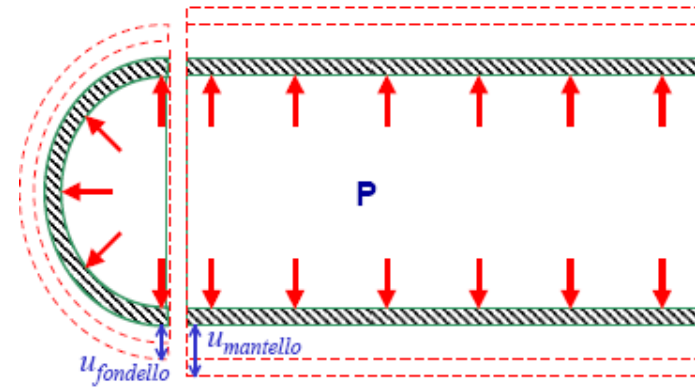
- Imponendo l'uguaglianza delle deformazioni trasversali:

$$\varepsilon_t^M = \varepsilon_t^F$$

$$\frac{pR}{Eh_M} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{pR}{2Eh_F} (1 - \nu)$$

$$\frac{h_F}{h_M} = \left(\frac{1 - \nu}{2 - \nu}\right)$$

$$h_F \cong 0.41h_M$$



- La congruenza delle deformazioni comporta un peggioramento dello stato di tensione nella zona di transizione fondo-mantello
- L'adozione di fondi con profilo più schiacciato comporta sovrasollecitazioni via via crescenti