Dipartimento di Ingegneria
Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

Sforzi

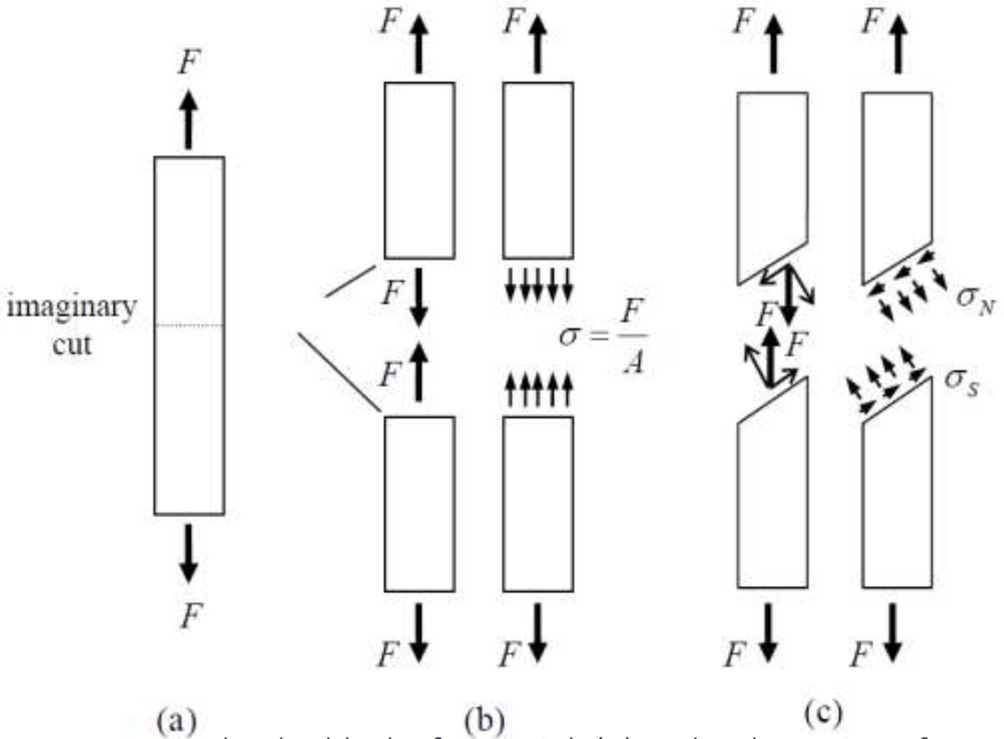
Lecture 2 – Carichi, sforzi e sollecitazioni

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Un passo fondamentale nella progettazione meccanica è la determinazione delle tensioni interne - una volta assegnati i carichi esterni - e valutare che non vengano superati i valori ammissibili (allowables)

- Le sollecitazioni interne - che differiscono dalle sollecitazioni superficiali o di contatto generate quando il carico è applicato - sono quelle associate alle forze interne che vengono create da carichi esterni per un corpo in equilibrio. Lo stesso concetto vale per geometrie e carichi complessi.

- In generale, la valutazione di questi sforzi non è semplice. Basti dire che saranno non uniformi su una superficie, cioè lo stress di alcune particelle differirà dallo stress di una particella vicina



a slender block of material; (a) under the action of external forces F, (b) internal normal stress σ, (c) internal normal and shear stress

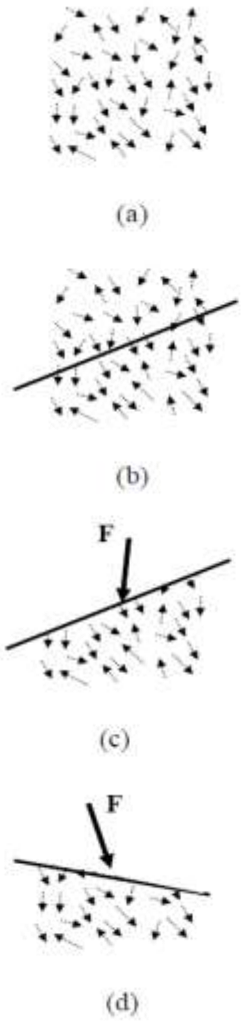
TRACTIONS E SIGNIFICATO FISISICO DEGLI SFORZI INTERNI

- Tutti i materiali hanno una microstruttura molecolare complessa e ogni molecola esercita una forza su quelle vicine. La complessa interazione di innumerevoli forze molecolari mantiene un corpo in equilibrio nel suo stato non sollecitato.

- Quando il corpo viene disturbato e deformato in una nuova posizione di equilibrio, agiscono forze risultanti non nulle agenti sul generico piano con cui immaginiamo di tagliare il corpo

- La forza agente esercitata dalle molecole sopra e sotto il piano immaginario sarà attrattiva o repulsiva.

- Attraverso la stessa porzione del copro possono essere scelti diversi piani: per ogni scelta si avrà una diversa forza agente.



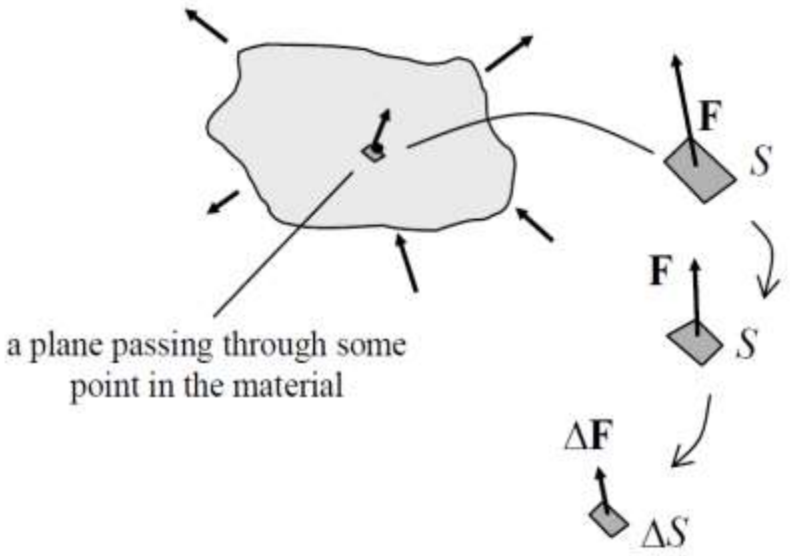
TRACTIONS E SIGNIFICATO FISISICO DEGLI SFORZI INTERNI

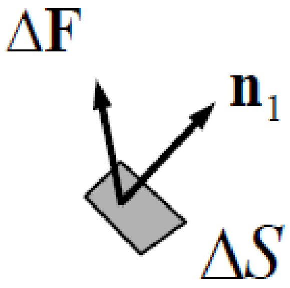
- La “traction” per un generico punto di un corpo è definita nel modo seguente:
  - Si consideri una superficie S costruita intorno al punto materiale su cui agisce la forza F.
  - Se si riduce sia il piano sia la forza, la direzione di quest’ultima potrà cambiare ma il rapporto F/S rimarrà costante. Riducendo il tutto differenziali la forza agirà lungo una direzione particolare.
  - Il valore limite del rapporto tra la forza e la superficie è definita come traction (o vettore dello sforzo)

- Per un punto assegnato passano infiniti vettori dello sforzo in quanto infiniti sono i piani arbitrari passanti per quel punto

- Per questo il piano su cui agisce il vettore dello sforzo deve essere specificato: questo è possibile indicando la normale n alla superficie su cui il vettore agisce.

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$





$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n}_1)} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

TRACTIONS E SIGNIFICATO FISISICO DEGLI SFORZI INTERNI

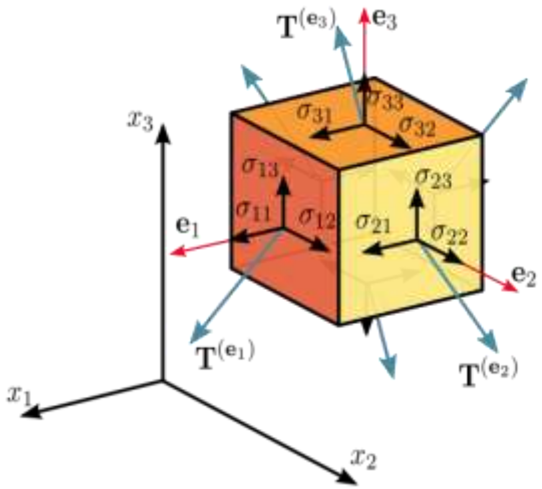
- Il vettore dello sforzo può essere decomposto in component che agiscono normalmente o parallelamente alla superficie su cui agisce

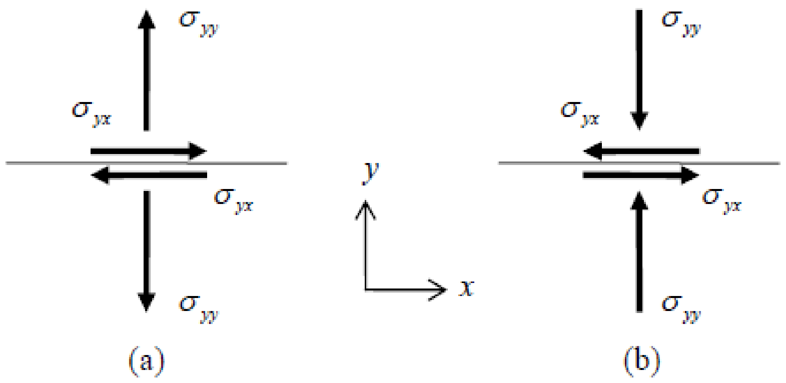
- Queste componenti sono chiamate componenti dello sforzo o semplicemente sforzi. Ed indicati con il simbolo σ_{ij}; gli indici indicano la superficie su cui lo sforzo agisce e la direzione lungo la quale è applicati.

- Convenzione dei segni delle componenti di sforzo

- Lo sforzo è positivo se la direzione della normale e la direzione della componente dello sforzo sono entrambe positive o negative

- Lo sforzo negativo quando le due direzioni sono di segno opposto.



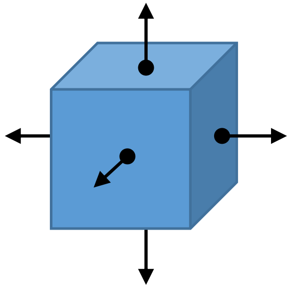


TIPI DI SFORZI

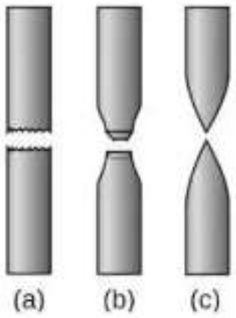
Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Sforzo normale.

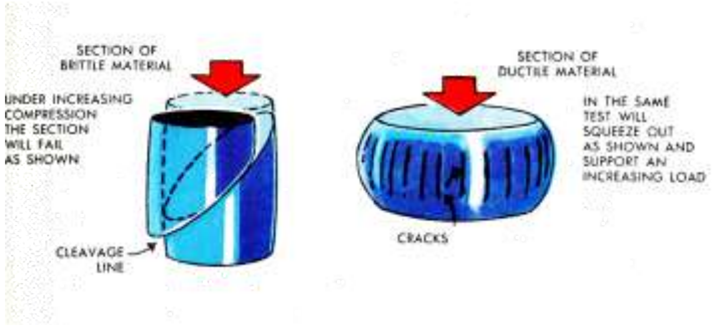
- La superficie resistente è normale alla forza interna



- Sforzo di trazione. È lo sforzo indotto in un corpo quando è soggetto a forze uguali ed opposte che hanno come risultato l’allungamento del corpo



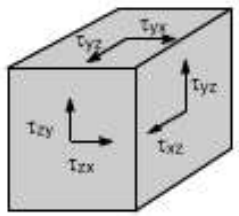
- Sforzo di compressine. Lo sforzo indotto da forze uguali ed opposte che agiscono in modo da causare un accorciamento del corpo



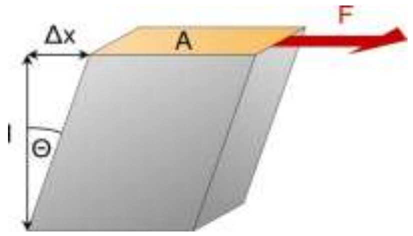
TIPI DI SFORZO

- Sforzo combinato.

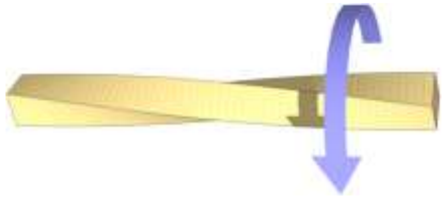
- E' quella condizione non rappresentabile con una singola risultante di sforzo



- Sforzi di taglio. Forze parallele all'area resistente generano sforzi di taglio. Altrimenti detti: sforzi tangenziali



- Sforzi torsionali. Sono gli sforzi che si generano in una barra circolare a seguito di un momento torcente applicato



SFORZO SEMPLICE

- In alcune situazioni, lo sforzo all'interno di un corpo può essere adeguatamente descritto da un unico scalare, o vettore
- Le situazioni dette di sforzo semplice in cui questo accade sono nella pratica ingegneristica sono :

- Sforzo normale uniassiale

- Sforzo di taglio semplice (simple shear)

- Sforzo normale isotropo

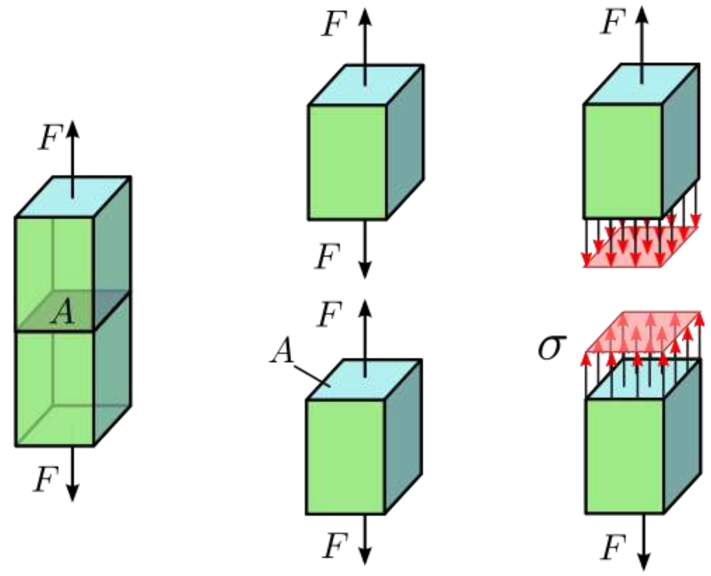
SFORZO SEMPLICE

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Sforzo normale uniassiale

- Questo sforzo si realizza in un componente «asta» di sezione uniforme e materiale omogeneo soggetto a sollecitazione di trazione F lungo il suo asse

- Se il sistema è in equilibrio e non cambia con il tempo ed il peso dell'asta può essere trascurato allora su ogni sezione trasversale A dell'asta la forza agente sarà la stessa

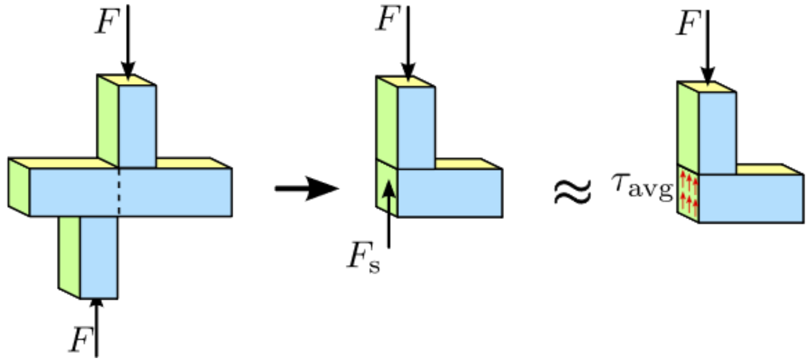


- Pertanto lo sforzo attraverso l'asta potrà essere espresso come:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

SFORZO SEMPLICE

- Sforzo a taglio semplice (simple shear)
- Questo tipo di sforzo si genera quando uno strato uniforme di materiale elastico è collegato a due corpi sollecitati in direzioni opposte da forze parallele allo strato
- Se indichiamo con F l'intensità di queste forze e con M il piano medio dello strato, come nel caso di sforzo normale, la parte dello strato da un lato di M dovrà tirare la parte opposta con la medesime forza F.

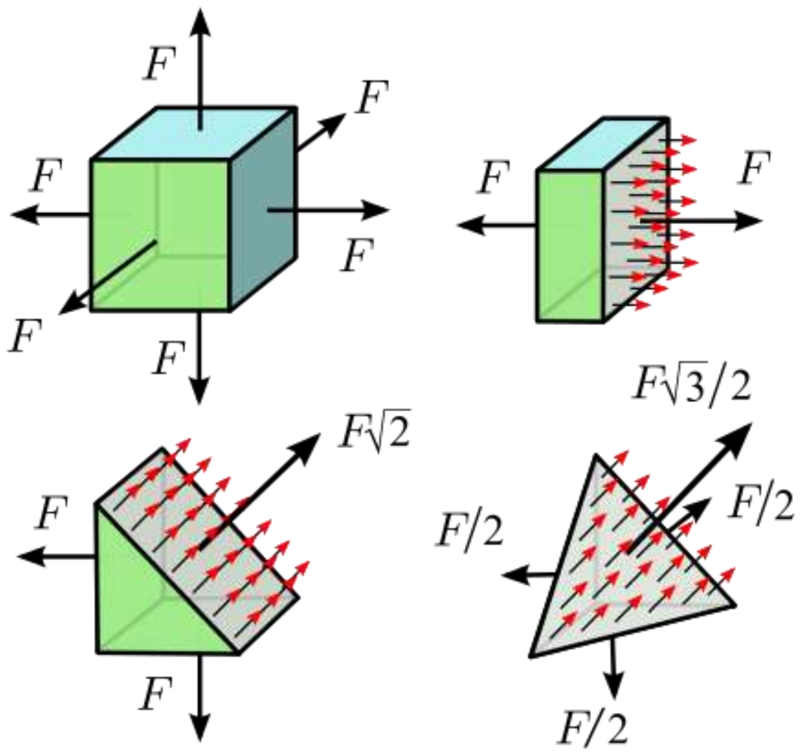


- Assumendo che la direzione delle forza sia nota lo sforzo su M può essere espresso da un singolo numero calcolato come la forza agente diviso l'area A:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

- Per ogni piano S normale allo strato, la forza interna netta su S, e quindi il relativo sforzo, sarà nullo.

- Sforzo normale isotropo (sforzo idrostatico)
- Un altro stato di sforzo semplice si ottiene quando il corpo materiale è soggetto ad uno sforzo di trazione (o compressione) uguale in tutte le direzioni
- Questo è il caso di un corpo immerso in liquido o gas a riposo o nel caso di un element cubico elastic sottoposto alla medesima componente di sforzo normale su tutte le facce
- La forza normale ad una generica sezione S all'interno del cubo deve bilanciare le forze applicate nella sezione opposta.
- Pertanto in nelle tre sezioni, le forze risulteranno F (alto destra), $F\sqrt{2}$ (basso sinistra), e $F\sqrt{3}/2$ mentre il valore di S è A, $A\sqrt{2}$ e $A\sqrt{3}/2$, rispettivamente.
- In questo modo lo sforzo su S risulterà essere pari a F/A in tutti e tre I casi.



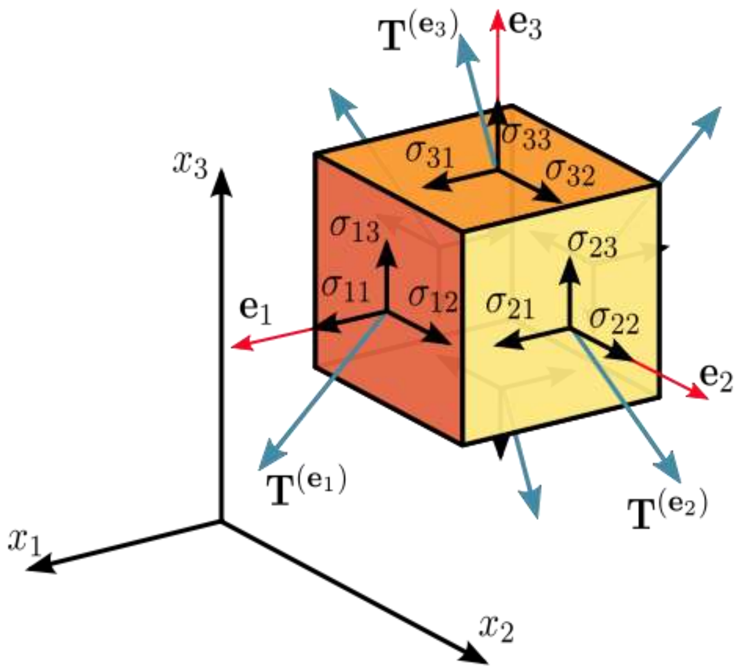
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE DELLO STATO DI SFORZO

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- TENSORE DEGLI SFORZI. Uno stato di sforzo tridimensionale è descritto dal tensore degli sforzi di Cauchy σ, (detto anche sforzo vero)
- Il tensore consiste in nove componenti:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



- definiscono completamente lo stato di sforzo in un punto all'interno di un material nel suo stato deformato o configurazione.
- Il tensore correla il vettore unitario della direzione il vettore dello sforzo T(n) attraverso una superficie immaginaria perpendicolare a n.
- Le unità di misura per il tensore e lo stress vector sono le stesse: N/m2. Il vettore unitario è senza dimensioni.

- DEVIATORE DEL TENSORE DEGLI SFORZI. Il tensore degli sforzi può essere sempre decomposto nella somma di due termini :
    - Un tensore idrostatico o sforzo volumetrico responsabile della variazione di volume del corpo sollecitato;
    - Una componente deviatorica responsabile della variazione di forma a parità di volume

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

- Dove $\pi = \sigma_{kk}/3$ è la pressione.
- Il deviatore può essere ottenuto per sottrazione dal tensore di Cauchy :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \pi\delta_{ij}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \pi & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_y - \pi & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_z - \pi \end{bmatrix}$$

RAPPRESENTAZIONE TRIDIMENSIONALE DELLO STATO DI SFORZO

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- Sforzi principali e invarianti degli sforzi. Per ogni punto di un corpo sollecitato ci sono almeno tre piani, detti principali, con normali – dette direzioni principali – in cui il corrispondente vettore di sforzo non presenta componenti di sforzo di taglio.
- Le componenti di sforzo lungo queste direzioni sono dette sforzi principali.
- Le componenti del tensore degli sforzi dipendono dall'orientamento del sistema di coordinate di riferimento Tuttavia, il tensore degli forzi è una quantità fisica indipendente dal sistema di coordinate che lo rappresenta

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- Esistono alcune quantità invarianti rispetto al sistema di coordinate scelto, questi sono detti invarianti del tensore degli sforzi.

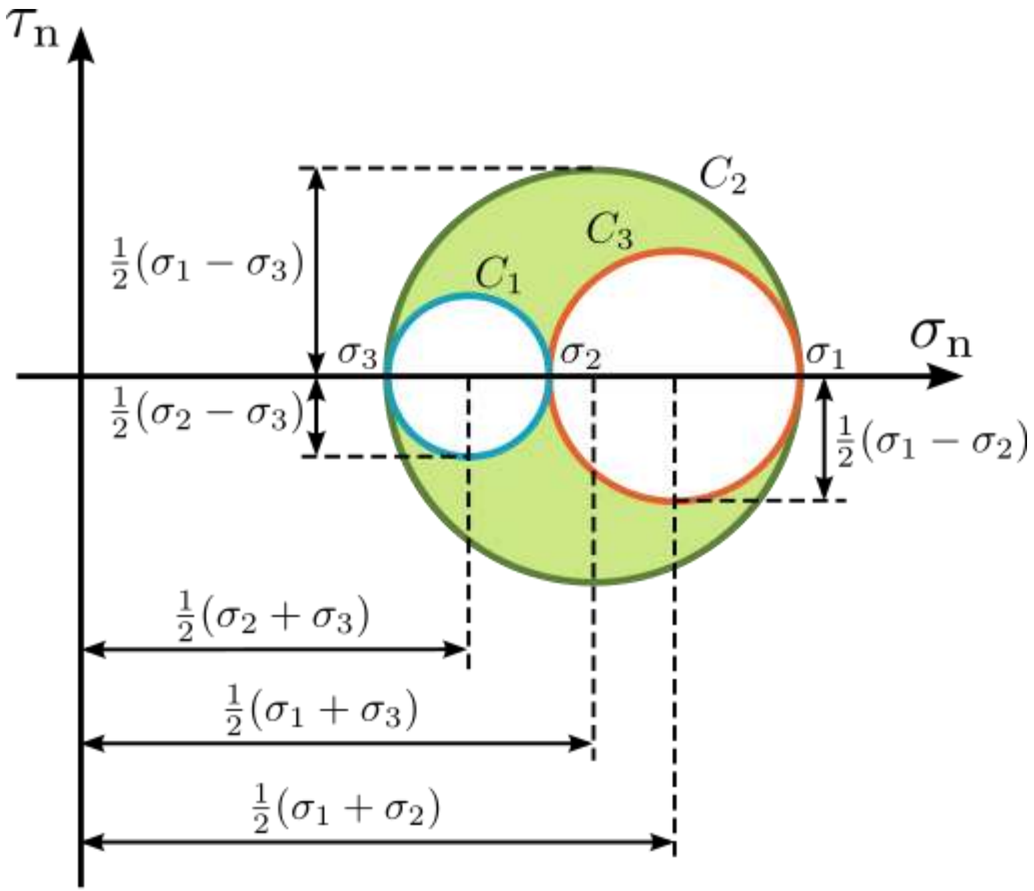
$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2$$

$$I_3 = det\left|\sigma_{ij}\right|$$

RAPPRESENTAZIONE DI UNO STATO TRIDIMENSIONAL DI SFORZO

- Il tensore di stress di Cauchy obbedisce alla legge di trasformazione del tensore con un cambiamento nel sistema di coordinate.
- Una rappresentazione grafica di questa legge di trasformazione è il cerchio di Mohr.
- Il cerchio di Mohr viene usato per determinare graficamente le componenti di sollecitazione che agiscono su un sistema di coordinate ruotato, cioè, agendo su un piano orientato diversamente, che passa attraverso quel punto.
- L'ascissa, σn e l'ordinata, τn, di ciascun punto sul cerchio, sono le grandezze delle componenti normali e di taglio, rispettivamente, che agiscono sul sistema di coordinate ruotato.
- In altre parole, il cerchio è il luogo dei punti che rappresentano lo stato di stress sui singoli piani in tutti i loro orientamenti, in cui gli assi rappresentano gli assi principali dell'elemento di sollecitazione.



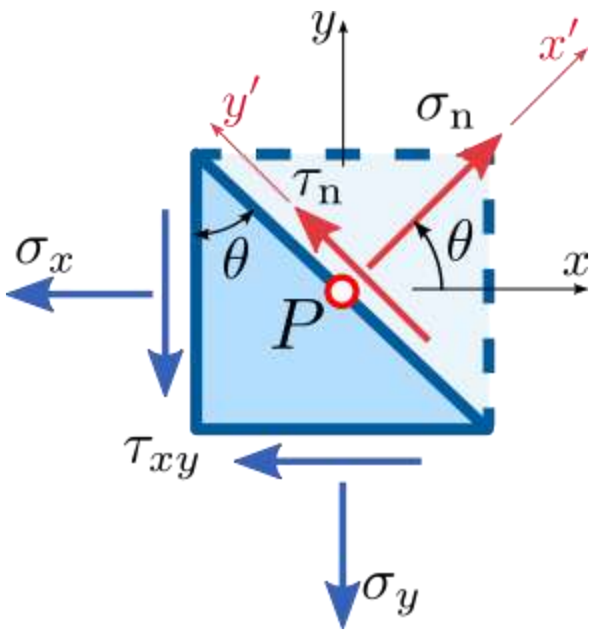
IL CERCHIO DI MOHR PER UNO STATO DI SFORZO BIDIMENSIONALE

- In due dimensioni, il tensore delle tensioni a un dato punto materiale P rispetto a qualsiasi due direzioni perpendicolari è completamente definito da sole tre componenti di sollecitazione.
- Per il particolare sistema di coordinate (x, y) queste componenti di sollecitazione sono: le tensioni normali σx e σy e lo sforzo di taglio τxy

- Dall'equilibrio del momento angolare,
- $\tau xy = \tau yx$

- Pertanto il tensore di Cauchy può essere scritto come:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$



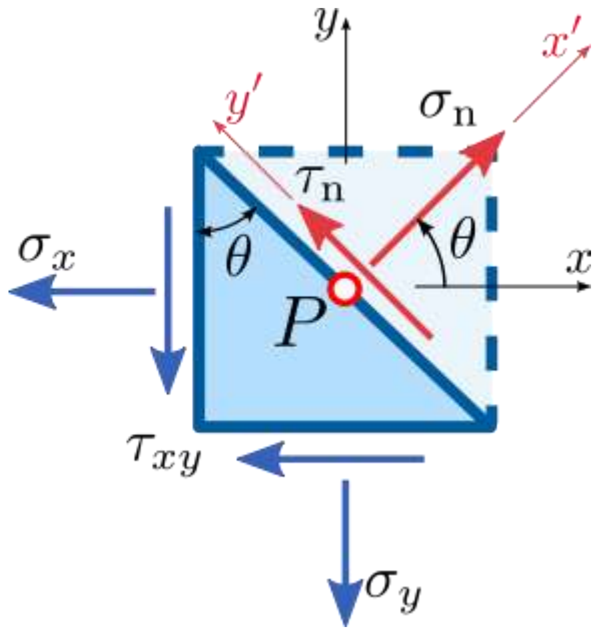
- Sforzo piano : sz=0
- Deformazione piana: ez=0

- Dall'equilibrio delle forze sull'elemento infinitesimo le component di sforzo normale e taglio sono date da:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)cos2\theta + \tau_{xy}sin2\theta$$

$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)sin2\theta + \tau_{xy}cos2\theta$$

- Queste due equazioni sono le equazioni parametriche di Mohr.



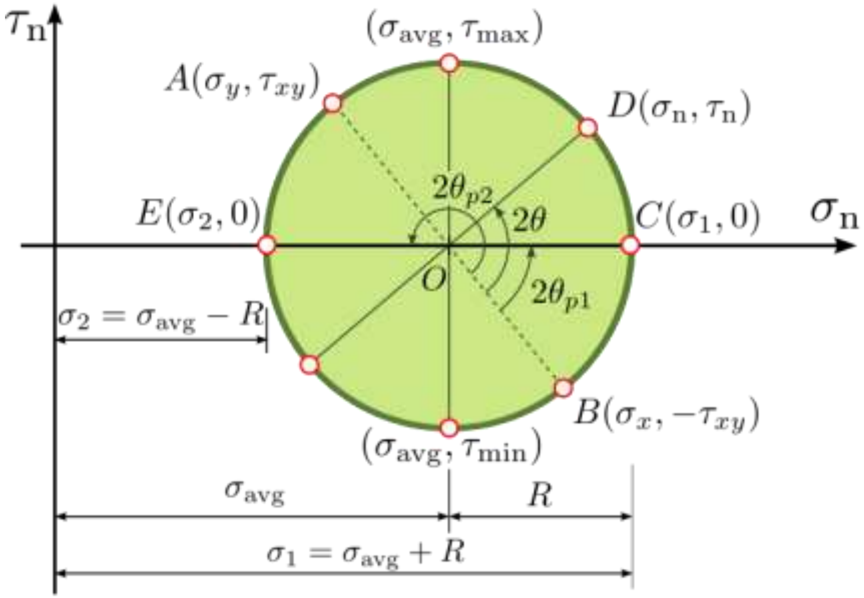
IL CERCHIO DI MOHR CIRCLE PER UNO STATO DI SFORZO BIDIMENSIONALE

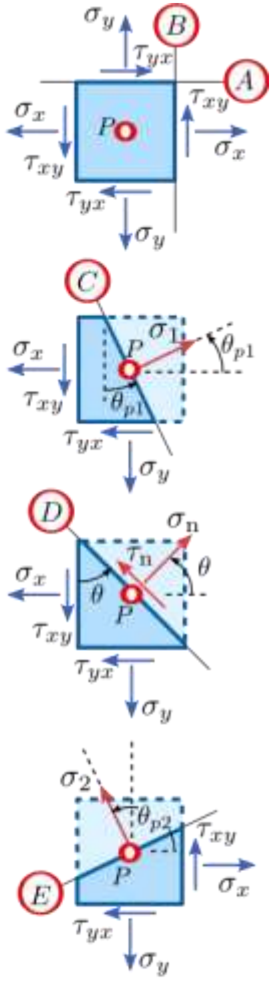
- Eliminando il parametro 2θ si ottiene:

$$\left(\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right)^2 + \tau_n^2 = R^2$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_n^2}$$

- Con centro in C$\left(\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0\right)$





$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

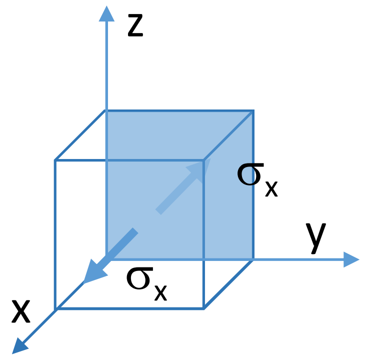
$$\sigma_{avg} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \qquad \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

CERCHIO DI MOHR: APPLICAZIONI

- Scopo del progetto è la determinazione della sollecitazione massima risultante dal carico esterno (funzionamento ed eccezionale)
- 1. Determinare il punto e le posizioni in cui lo stress è il più elevato.
- 2. Dalle informazioni generali su s e t, determinate le sollecitazioni principali
- 3. Selezionare un criterio di cedimento per il materiale specifico
- 4. Determinare gli ammissibili per il materiale
- 5. Confrontare lo stress calcolato con l’ammissibile e stabilire un fattore di sicurezza.

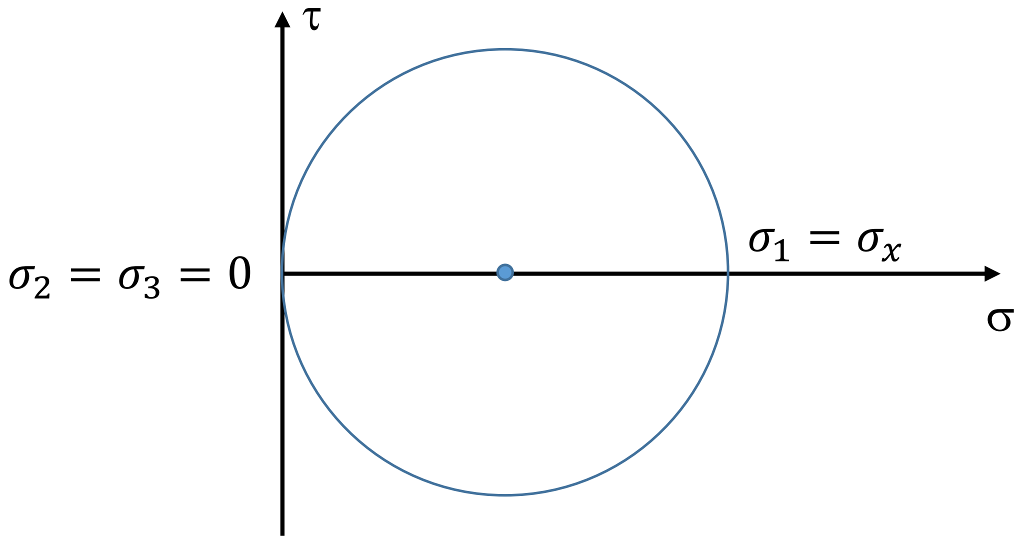
CERCHIO DI MOHR: APPLICAZIONI

- SFORZO SEMPLICE: TRAZIONE UNIASSIALE



- Tutti i punti della sezione di un elemento sono ugualmente sollecitati.
- Non ci sono scelte preferenziali per il punto più critico: selezionare un elemento cubo di riferimento attorno al punto e costruire lo stato di sforzo.

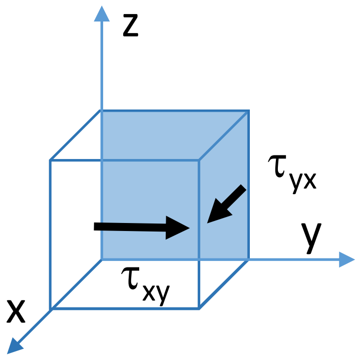
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



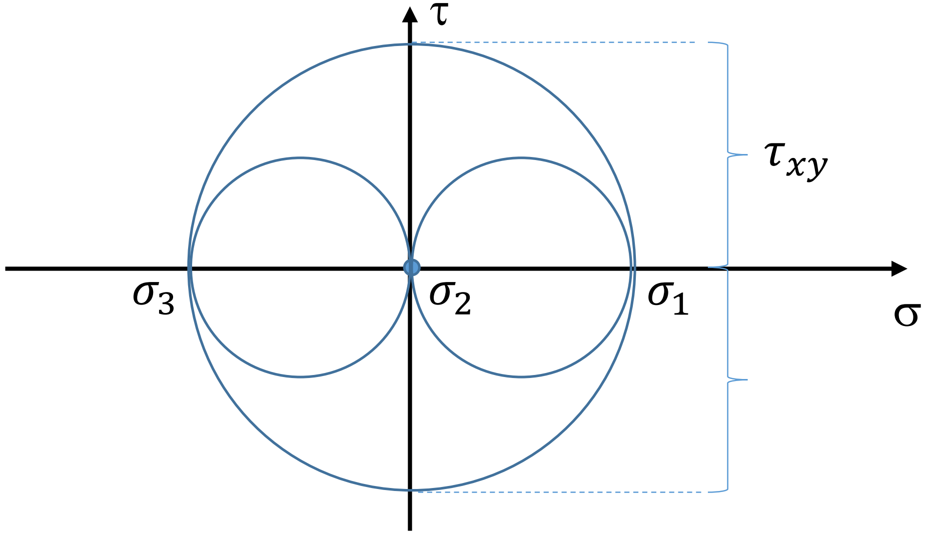
Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- TORSIONE SEMPLICE

- I punti più sollecitati sono quelli al raggio massimo della sezione dell'elemento, Z è un asse principale perché lo sforzo di taglio è 0



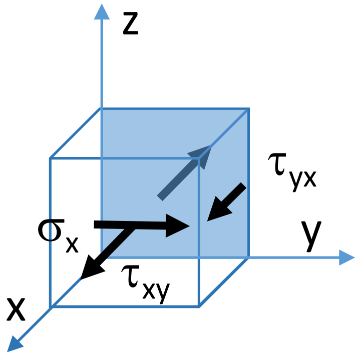
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

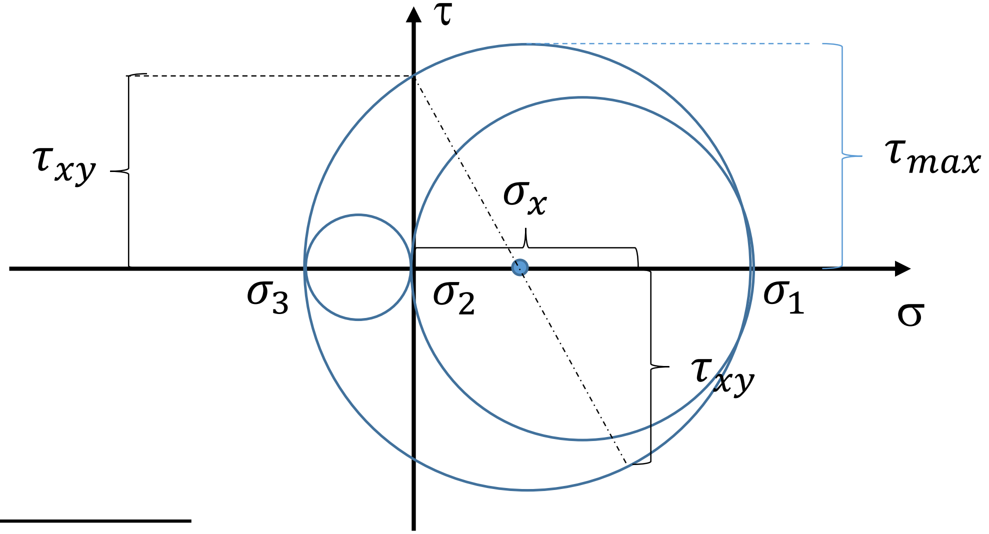


$$\sigma_1 = |\sigma_3| = \tau_{xy}$$

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- FLESSIONE E TORSIONE
- I punti più sollecitati sono quelli al raggio massimo della sezione dell'elemento Z è un asse principale perché lo sforzo di taglio è 0





$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = |\sigma_3| = \tau_{xy}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

LETTURE CONSIGLIATE

- http://www.mech.utah.edu/~brannon/public/Mohrs_Circle.pdf
- Schaum's Outline of Strength of Materials, Fifth Edition (Schaum's Outline Series) Fifth (5th) Edition Paperback – September 12, 2010
- Strength of Materials (Dover Books on Physics) Reprinted Edition by J. P. Den Hartog, ISBN-10: 0486607550