# Meccanica della Frattura

Lecture 8 – Meccanica della Frattura

#### **Introduzione**

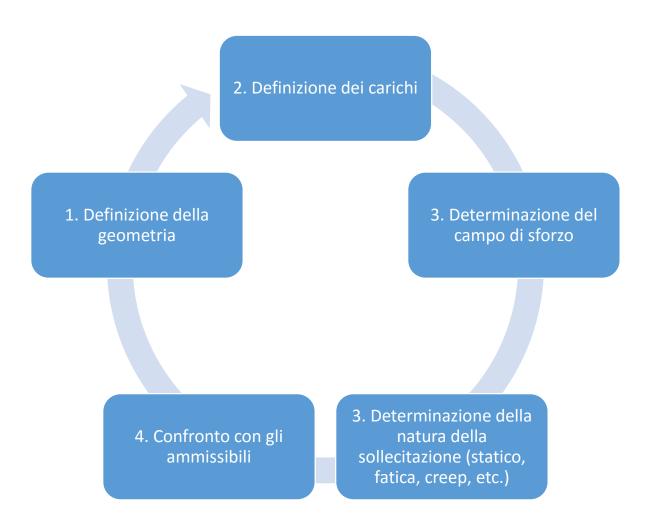
- Fino al 1950, eventi catastrofici come il cedimento delle navi Liberty, erano imprevedibili e inspiegabili alla luce di una progettazione che si basa sull'assunzione che il materiale è esenta da difetti.
- Nella progettazione classica, detta anche della «meccanica dei materiali» (mechanics of materials), il materiale viene assunto:
  - Omogeneo → continuità sforzi e deformazioni
  - Isotropo → descrizione della risposta del materiale con scalari
  - Esente da difetti → assenza di concentrazioni locali, validità delle soluzioni teoriche per i campi di sforzo



## Introduzione (cont.)

 Nella meccanica dei materiali, uno stato di sforzo è ammissibile se il valore dello sforzo calcolato (DESIGN STRESS) in ogni punto del componente è inferiore ad un valore limite caratteristico del materiale (ALLOWABLE)

$$\sigma_d \leq \sigma_{all.} = n\sigma_Y$$



### Introduzione (cont.)

- Il valore ammissibile della sollecitazione viene determinato da prove sperimentali (trazione, compressione, buckling, fatica, etc.)
- Identificazione dei possibili «failure modes»

#### **Es.: LINEPIPE DESIGN**

- Definizione degli «stati limite» (limit state criteria)
  - Spessore minimo e maggiore rapporto D/t
    - Bursting under combined load
    - Local buckling/collapse
    - Fracture (flow stress: media tra snervamento e ultimate stress)
    - Low-cyce fatigue
    - Ratcheting

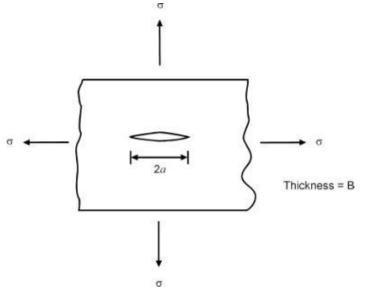


#### Meccanica della Frattura

- Nella meccanica della frattura si assume che i materiali non sono esenti da difetti
- I difetti esistono nel materiale:
  - a causa del processo di produzione
  - si formano in esercizio a causa dei carichi di *normal operation*.

 I difetti si presentano in forma di «cricche»: difetti bidimensionali che causano la riduzione della sezione nominale resistente e generano una elevata concentrazione delle tensioni





- Alcuni materiali metallici mostrano una significativa variazione del meccanismo di rottura in funzione della temperatura
- Frattura fragile vs rottura duttile
- La frattura fragile avviene principalmente nei metalli a struttura BCC e HCP
- Essa è promossa da:
  - Temperatura
  - Triassialità dello stato di sforzo
  - Velocità di deformazione
- I metalli FCC sono duttili anche a bassissima temperatura

- Caratteristiche della frattura fragile:
  - Assenza di deformazione plastica (macroscopica): rottura in campo elastico!
  - Il piano di frattura è perpendicolare alla sollecitazione applicata
  - Bassa energia di deformazione
  - La frattura si propaga con la velocità del suono nel mezzo



- Caratteristiche della frattura fragile:
  - Assenza di deformazione plastica (macroscopica): rottura in campo elastico!
  - Il piano di frattura è perpendicolare alla sollecitazione applicata
  - Bassa energia di deformazione
  - La frattura si propaga con la velocità del suono nel mezzo





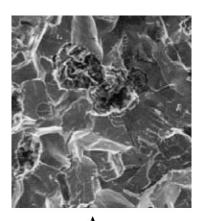
Granbury, TX, USA (2010)

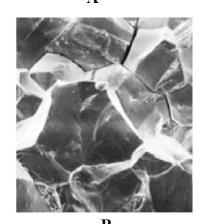
- Rottura fragile:
  - Rottura transgranulare (Clivaggio)
    Il piano di frattura passa attraverso i
    grani. La superficie di frattura ha un
    aspetto «sfaccettato» proprio a causa
    della diversa orientazione dei piani di

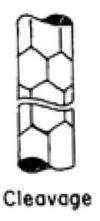
• Rottura integranulare

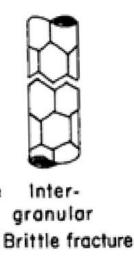
clivaggio dei grani

Il piano di frattura è lungo i bordi di grano (i bordi di grano sono indeboliti o infragiliti a causa della presenza di impurità o precipitati)

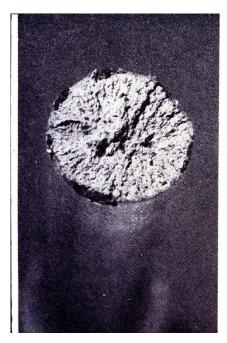


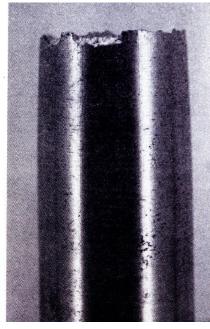






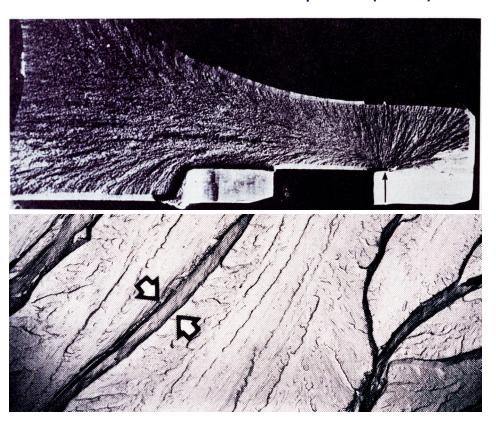
• Caratteristiche macroscopiche



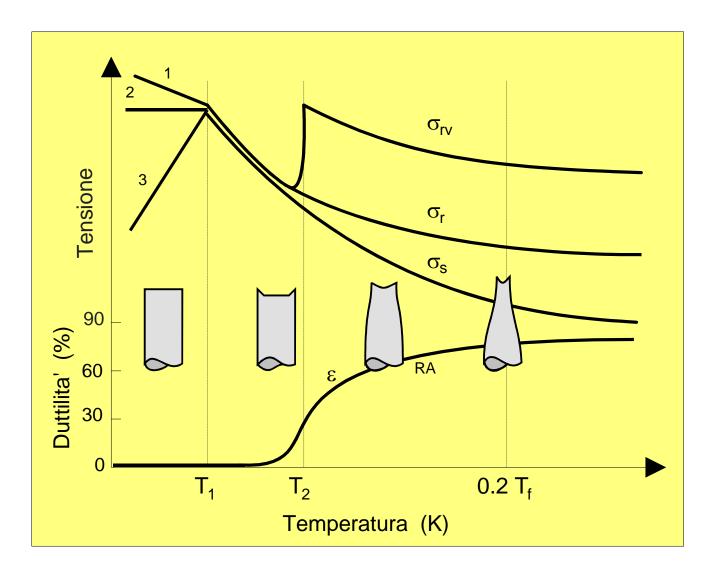


- Superficie «piatta»
- Assenza di strizione
- Aspetto «cristallino» (brillante faceted)

Caratteristiche microscopiche (SEM)



- «Chevron marks»
- «River pattern»

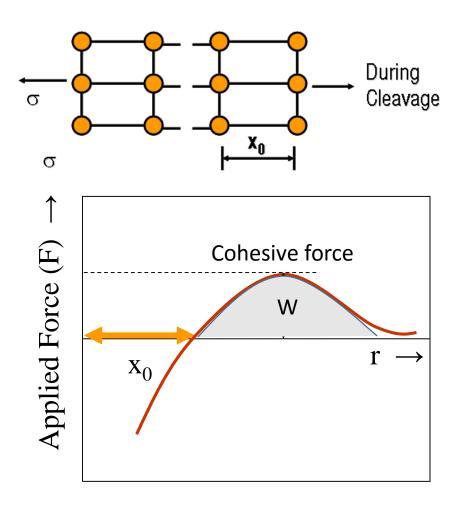


### Valore teorico della tensione a rottura (metallo)

- Il valore della sforzo (normale o taglio) a rottura per un reticolo cristallino esente da difetti può essere stimato sulla base dell'energia di legame.
- Tenendo conto che la forza necessaria per allontanare dalla posizione di equilibrio due piani di atomi varia con la distanza secondo:
- Il valore dello sforzo a rottura può essere stimato dal lavoro necessario per la separazione:

$$\sigma_c = \frac{E\lambda}{\pi x_0}$$
 $\sigma_{cohesive} \approx \frac{E}{\pi}$ 

 Nessun materiale reale manifesta questi valori di resistenza. Spiegazione: presenza di difetti nel reticolo



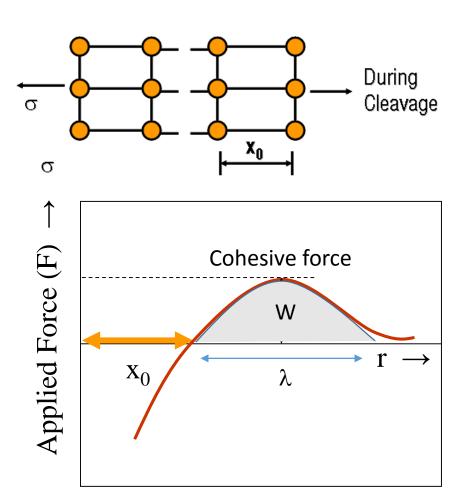
### Valore teorico della tensione a rottura (metallo)

- Durante la rottura si formano due nuove superfici libere di frattura.
- Uguagliando il valore dell'energia richiesta per la formazione delle due superfici all'energia di legame:

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda} \sigma_c \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) dx = \sigma_c \frac{\lambda}{\pi}$$

Sostituendo il rapporto  $\lambda/\pi$  nell'espressione dello sforzo teorico a rottura:

$$\sigma_c = \frac{E\lambda}{\pi x_0} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{x_0}}$$



#### Soluzione di Inglis (Ref: C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners",

Trans. Inst. Naval Architects, <u>55</u>, 1913, pp 219-241.

 Inglis determinò la soluzione per un generico foro ellittico soggetto a tensione remote in piastra infinita:

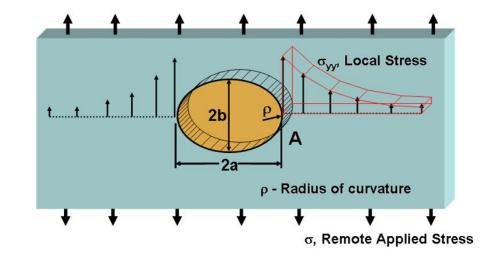
$$\sigma_{A} = \sigma_{0} \left[ 1 + 2 \frac{a}{b} \right] = \sigma_{0} \left[ 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]$$

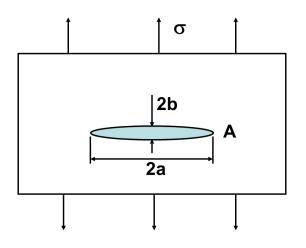
$$\rho$$
 – Raggio di curvatura  $\rho = \frac{b^2}{a}$ 



K<sub>+</sub> = Sforzo di picco max/Sforzo nominale applicato

$$K_t = \sigma_A / \sigma_0$$





#### Soluzione di Inglis (Ref: C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners",

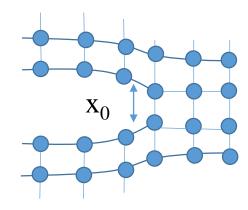
Trans. Inst. Naval Architects, <u>55</u>, 1913, pp 219-241.

- Per  $\rho \rightarrow 0$ , lo sforzo al punto A diventa infinito
- Questo non è realistico in quanto nessun materiale è in grado di sostenere uno sforzo infinto
- La soluzione prevede che per qualunque sforzo applicato <u>al remoto</u>, lo sforzo all'apice diventi infinito!
- Nei materiali reali la presenza di plasticità ridistribuisce gli sforzi e promuove l'arrotondamento dell'apice (blunting)
- In assenza di plasticità il raggio minimo fisico all'apice non nullo ma si avvicina alla distanza atomica di equilibrio del reticolo cristallino:  $\rho \approx x_0$

$$\sigma_A = \sigma_0 \left[ 1 + 2 \frac{a}{b} \right] = \sigma_0 \left[ 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]$$

$$a/\rho >> 1$$

$$\sigma_A \approx 2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{x_0}}$$



#### Soluzione di Inglis (Ref: C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners",

Trans. Inst. Naval Architects, <u>55</u>, 1913, pp 219-241.

• Uguagliando il valore teorico della tensione al punto maggiormente critico con il valore di resistenza teorico del materiale possiamo ottenere l'espressione dello sforzo a rottura <u>remoto</u> per un difetto di dimensione a:

$$2\sigma_0 \sqrt{\frac{a}{x_0}} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{x_0}}$$

$$\sigma_0 = \sigma_f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\gamma_s}{x_0} \frac{x_0}{a}} = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}}$$

- Pertanto: lo sforzo per cui si ha rottura in una piastra con una cricca caricata a tensione remota dipende da
  - Materiale: E e γ<sub>s</sub>
  - Geometria: dimensione del difetto

Nota: in questa soluzione si fa l'ipotesi che la meccanca del continuo valga a scala atomica!! (non vero)

- Nel 1927 A.A. Griffith pubblica un lavoro in cui dimostra la intima connessione tra lo sforzo applicato e dimensione del difetto per la stima della resistenza di strutture con difetti
- Egli usò l'analisi di Inglis per foro ellittico al caso di della propagazione instabile di un difetto
- Griffith si rifece alla prima legge della termodinamica (conservazione dell'energia)

#### **CRITERIO DI GRIFFITH**

Un difetto diventa instabile ( e quindi si ha frattura) quando la variazione dell'energia di deformazione risultante da un incremento della sua dimensione è sufficientemente grande da superare l'energia superficiale del materiale



- La soluzione di Griffith prevede correttamente la rottura in materiali intrinsecamente fragili: vetro.
- Tentativi di adattare la soluzione al caso di metalli fallirono
- Il criterio presuppone che il lavoro di frattura sia esclusivamente quello di formazione delle superfici di frattura verificato solo per materiali fragili (vetri e ceramiche)
- Una modifica del modello per la sua applicazione ai metalli non venne presentato fino al 1948



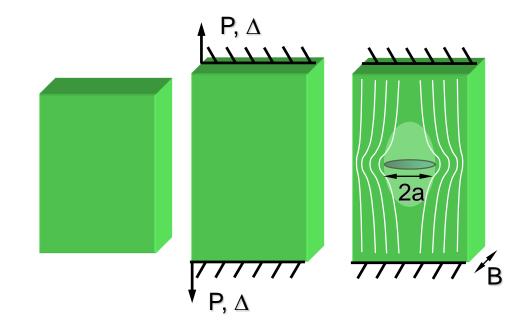
 Equazione di conservazione dell'energia (potenze):

$$\dot{E} = \dot{\Pi} + \dot{W_s} + \dot{K}_E$$

- E energia totale
- Π energia potenziale (forze esterne e energia di deformazione interna)
- W<sub>s</sub> lavoro per creare nuove superfici

Sostituzione della derivata rispetto al tempo con quella rispetto alla variabile dimensione del difetto

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial}{\partial A} = \dot{A} \frac{\partial}{\partial A}$$



Minimizzazione: derivata rispetto ad a e uguaglianza a zero

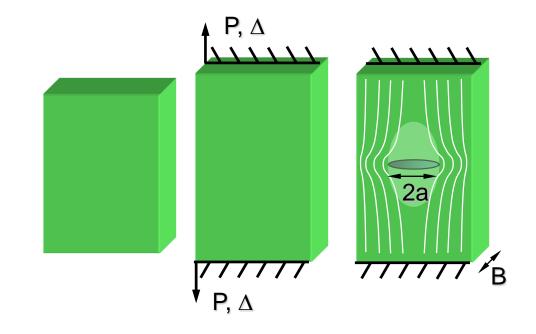
$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial \Pi}{\partial A} + \frac{\partial W_s}{\partial A} = 0$$

• Energia di deformazione rilasciata: ipotesi di Saint Venant, volume ellittico di dimensioni 2a x 4°.

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi \sigma^2 a^2 B}{E}$$

• Energia superficiale di frattura:

$$W_s = 2A\gamma_s = 4aB\gamma_s$$



$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} + \frac{\partial W_s}{\partial A} = -\frac{\pi \sigma^2 a}{E} + 2\gamma_s = 0$$

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

## Soluzione di A.A. Griffith (1920): confronto

Confronto con le precedenti soluzioni

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{x_0}}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}}$$

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a}\right)}$$

Legame atomico

Sforzo locale

Rilascio di energia di deformazione

- La previsione dello sforzo a rottura secondo il criterio di sforzo locale e Griffith differisce di circa il 40%
- Comunque gli approcci sono consistenti
- Le soluzioni differiscono quando il raggio di curvatura all'apice è molto più grande della distanza atomica
- Il modello di Griffith implica l'indipendenza dal raggio di curvatura

## Soluzione di A.A. Griffith (1920): strain energy release rate

• Definizioni:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA}$$

Crack driving force

$$R = \frac{dW_s}{dA}$$

Resistance

PIASTRA INFINITA

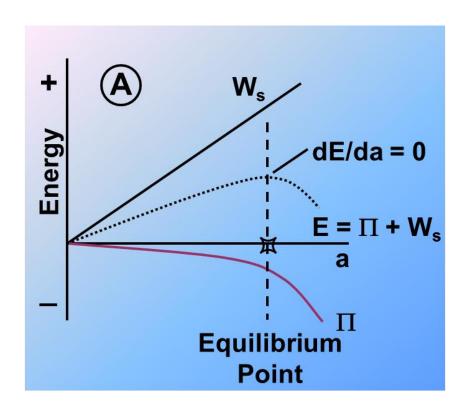
$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}$$

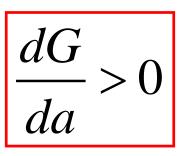
$$G_c = 2\gamma_s$$

$$G = \frac{1}{B} \left( \frac{dU}{da} \right)_{P} = \frac{1}{B} \left( \frac{dU}{da} \right)_{\Delta}$$

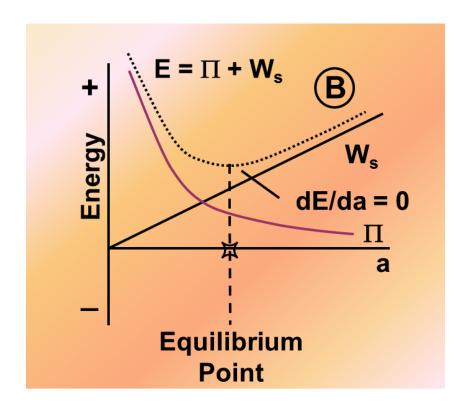
• U energia di deformazione conservata nel corpo.

 La condizione di stabilità di un difetto di dimensioni 2a, la si ottiene minimizzando la derivata di G



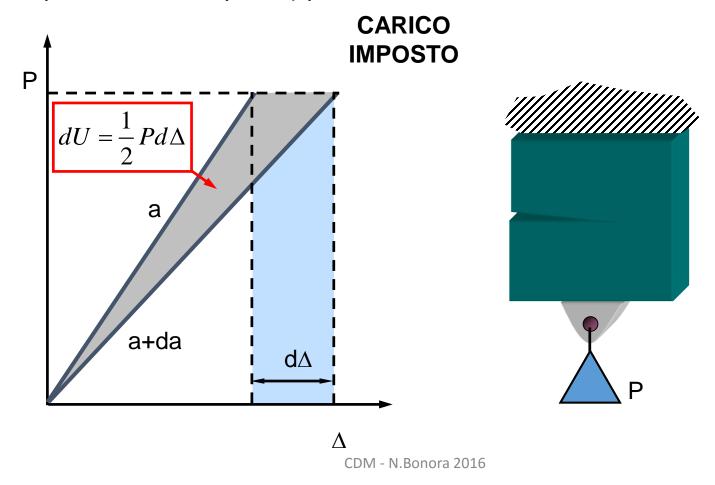


• La condizione di stabilità di un difetto di dimensioni 2a, la si ottiene minimizzando la derivata di G

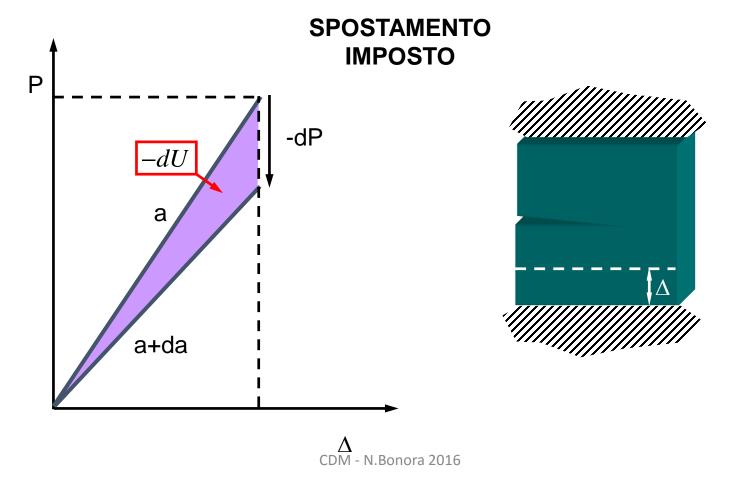


$$\frac{dG}{da} < 0$$

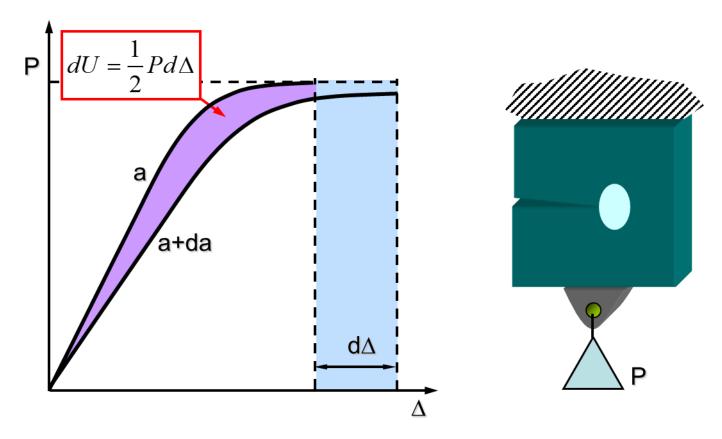
• La definizione di G secondo Griffith è indipendente dalla condizione di carico (carico imposto vs spostamento imposto) per avanzamenti infinitesimi del difetto.



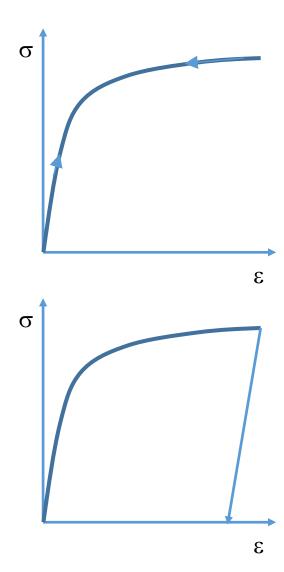
• La definizione di G secondo Griffith è indipendente dalla condizione di carico (carico imposto vs spostamento imposto) per avanzamenti infinitesimi del difetto.



 La definizione di G secondo Griffith continua a valere anche nel caso di ELASTICITA' NON LINEARE

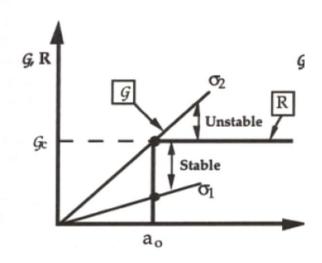


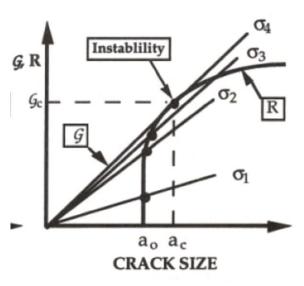
- ELASTICITA' NON LINEARE
- E' un approccio che è stato proposto per cercare di risolvere il problema elasto-plastico e si basa sull'osservazione che durante una trazione non è possibile distinguere tra un comportamento elasto-plastico ed un elastico non lineare
- Solo effettuando uno scarico è possibile riconoscere un comportamento elasto-plastico
- Il materiale elastico-non lineare è descritto dalle medesime equazioni costitutive di quello lineare elastico con la sola differenza che il modulo di elasticità varia in funzione della deformazione



### Soluzione di A.A. Griffith (1920): Curva di resistenza

- La curva di resistenza o R-curve rappresenta la resistenza del materiale all'avanzamento di un difetto
- È funzione del materiale (anche se soffre dell'effetto geometrico del campione utilizzato per la sua determinazione, vedi dopo)
- Due tipi di curve:
  - Materiali fragili: a gradino
  - Materiali duttili: legge di potenza



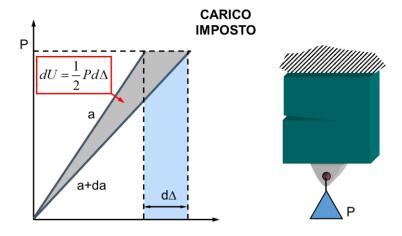


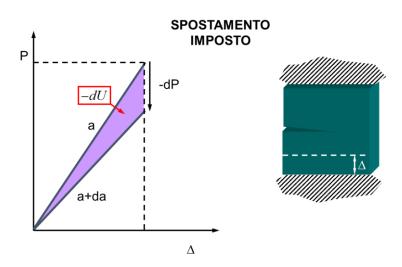
#### G nelle applicazioni pratiche

- Il criterio di Griffith stabilisce che un difetto di dimensione assegna diventi stabile sotto l'azione di una sollecitazione remota quando il rateo di energia di deformazione rilasciata per avanzamento infinitesimo super l'energia superficiale di frattura
- Lo strain energy release rate G è funzione del carico e della geometria,

$$G = \frac{1}{2} \frac{dU}{da}$$

 L'energia rilasciata può essere misurata dalla variazione di cedevolezza



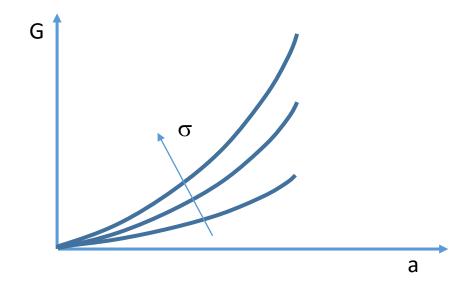


## G nelle applicazioni pratiche

 Nel caso di difetto in piastra infinita,
 l'espressione della crack driving force è data da

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E}$$

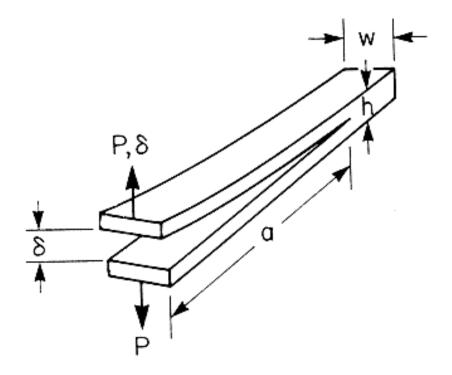
- G cresce con il quadrato della profondità del difetto e con il quadrato dello sforzo remoto
- Unità di misura: Nmm o kJ/m²



- La natura del segno di dG/da dipende dalla condizione di carico, mentre il valore di G è indipendente
- In termini del tutto generali è possibile affermare che i sistemi sollecitati in condizioni di spostamento imposto risultano in condizioni di propagazioni stabili per un difetto, mentre la condizione di carico imposto implica sempre una situazione di propagazione instabile
- Nelle applicazioni reali non è possibile sapere
  a priori se il sistema si comporti a carico o a
  spostamento imposto. Inoltre, variazioni
  geometriche ( ad esempio la crescita del
  difetto) possono far si che si passi da una
  condizione ( es. spostamento imposto) ad
  un'altra ( es. carico imposto)

- Si consideri la configurazione di geometria double cantilever beam (DCB)
- Relazioni analitiche
- Dalla teoria della teoria della trave, la cedevolezza è data da:

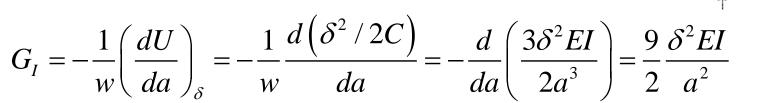
$$C = \frac{2a^3}{3E_{f1}I} ; \delta = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}$$



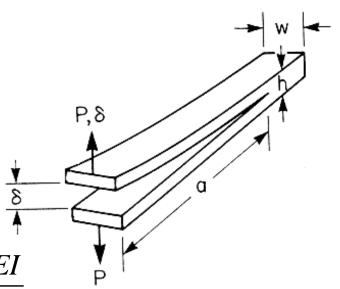
• La crack driving force in controllo di carico è esprimibile come:

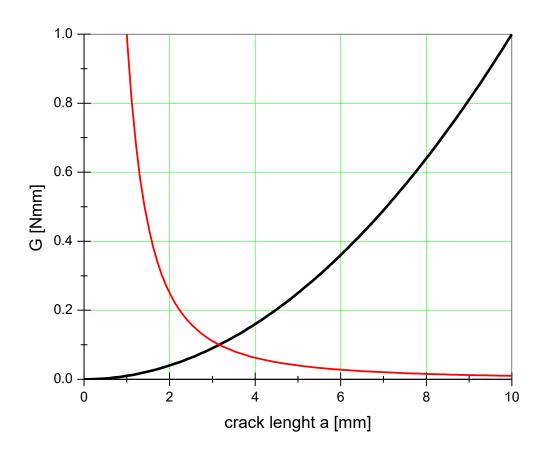
$$G_{I} = \frac{1}{w} \left(\frac{dU}{da}\right)_{P} = \frac{1}{w} \frac{d\left(1/2P \cdot \delta\right)}{da} = \frac{P^{2}}{2w} \frac{dC}{da} = \frac{P^{2}a^{2}}{wE_{f1}I}$$

• Mentre in condizioni di spostamento imposto:



• Le due espressioni sono numericamente equivalenti

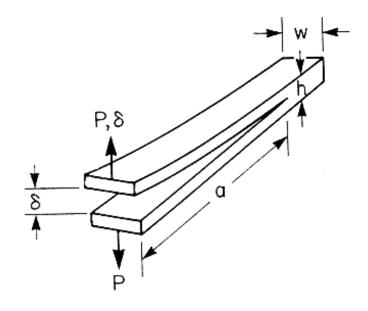




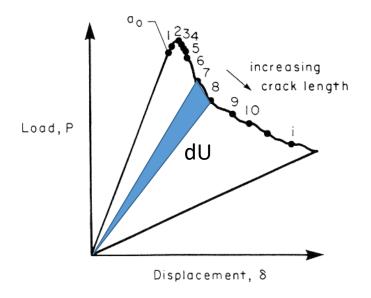
• Condizione di stabilità del difetto: 
$$\frac{dG_I}{da} \leq 0$$

• Carico imposto 
$$\frac{dG_I}{da} = \frac{2P^2a}{wE_{f1}I}$$
 INSTABILE!

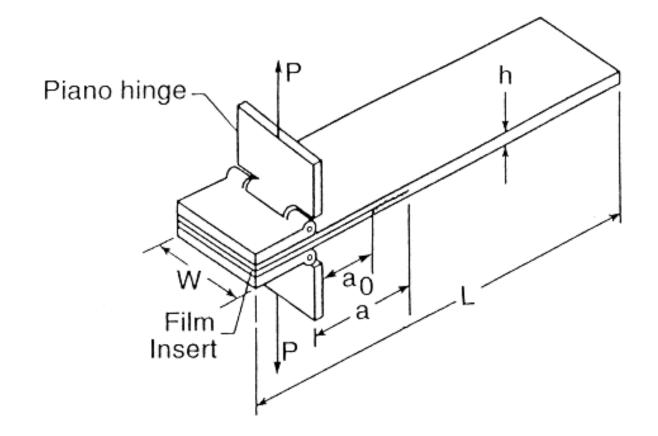
• Spostamento imposto 
$$\frac{dG_I}{da} = -\frac{4\delta^2 a}{C^2 w E_{f1} I}$$
 STABILE!



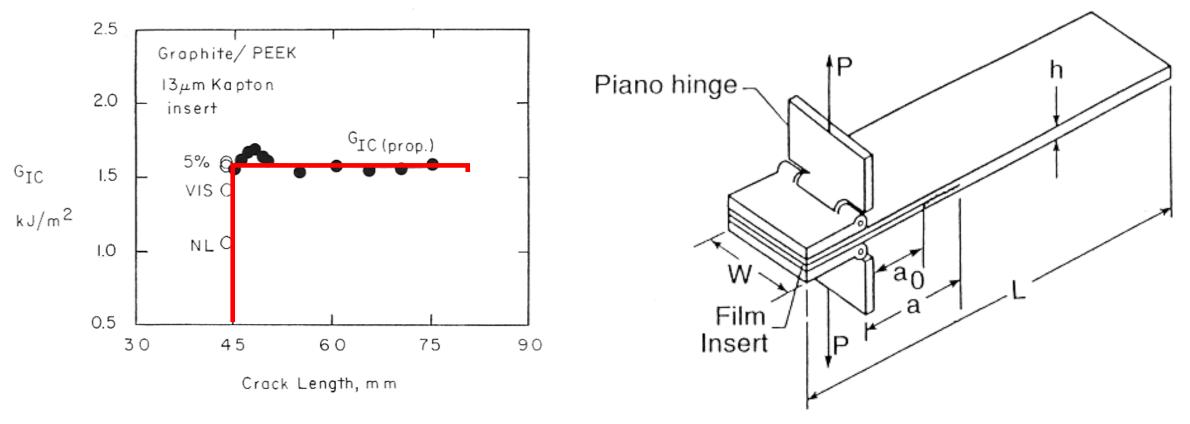
• Determinazione sperimentale di G critico



• Risposta tipica a spostamento imposto



• Determinazione sperimentale di G critico



• Esempio di curva R per un laminato Grafite/PEEK: G<sub>C</sub> indipendente da a.

 Provino End Noch Flexure (ENF): modo II (sliding mode)

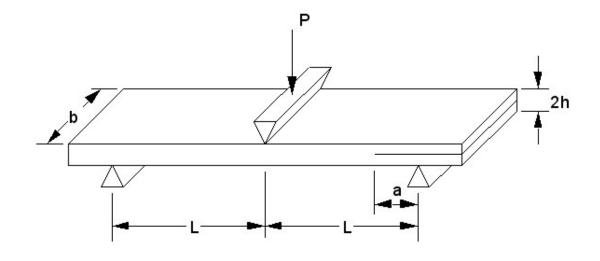
#### RELAZIONI ANALITICHE

 Dalla teoria della teoria della trave, la cedevolezza è data da:

$$C = \frac{2L^3 + 3a^3}{8E_{f1}wh^3}$$

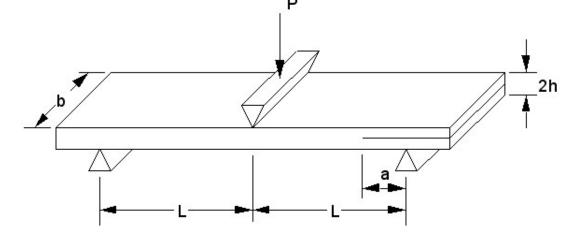
• Mentre, la crack driving force è data da:

$$G_{II} = \frac{9P^2Ca^2}{2w(2L^3 + 2a^3)}$$



• Condizione di stabilità del difetto:  $\frac{dG_{II}}{da} \le 0$ 

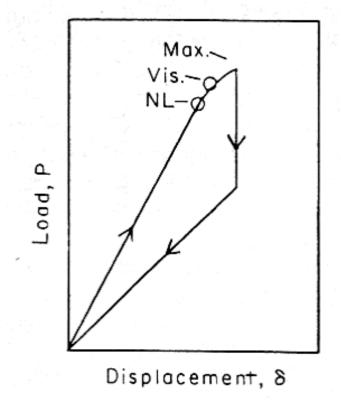
• Carico imposto 
$$\frac{dG_{II}}{da} = \frac{9aP^2}{8w^2h^3E_{f1}}$$
 INSTABILE!

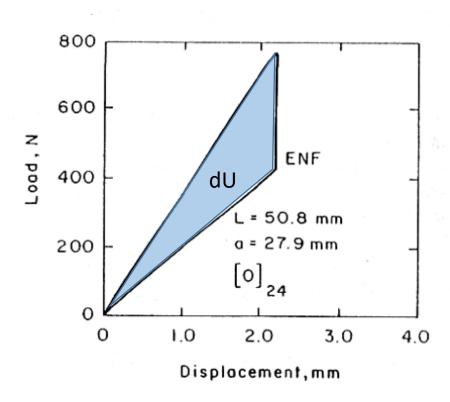


• Spostamento imposto 
$$\frac{dG_{II}}{da} = \frac{9\delta^2 a}{8E_{f1}w^2h^3C^2} \left[1 - \frac{9a}{2L^2 + 3a^3}\right]$$

• Diventa negativa (cioè STABILE) per:  $a \ge \frac{L^3}{\sqrt{3}} \approx 0.7L$ 

• Risposta tipica





• Esempio

