Dipartimento di Ingegneria
Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

Deformazioni

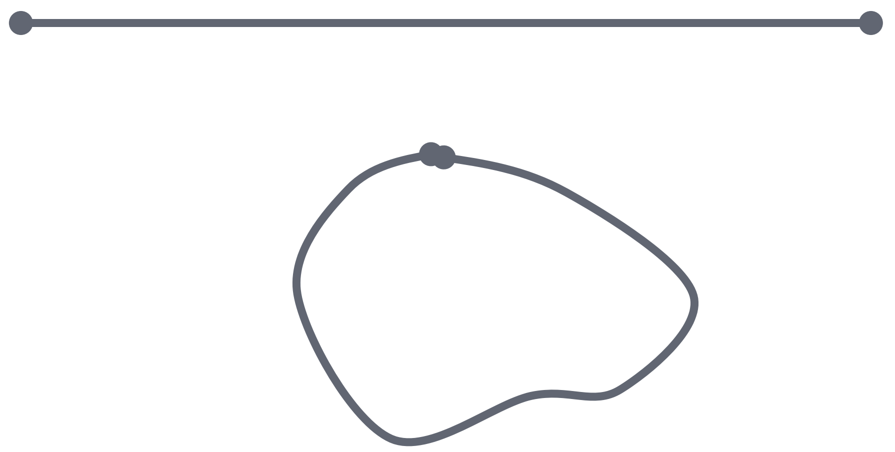
Lecture 3 – Definizioni, tensore delle deformazioni

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- I corpi reali sono ***deformabili***
- Sotto l'azione di carichi esterni, il corpo si modifica cambiando da una **configurazione di riferimento** a quella **corrente**.
- Una «configurazione» contiene le posizioni di tutte le particelle che compongono il corpo
- La trasformazione da una configurazione di riferimento a quella attuale si definesce: deformazione.

Una deformazione può essere provocata da:

- Carichi esterni,
- Da forze agenti sul corpo (gravità, forze elettromagnetiche, etc),
- Variazioni di temperatura, umidità o reazioni chimiche



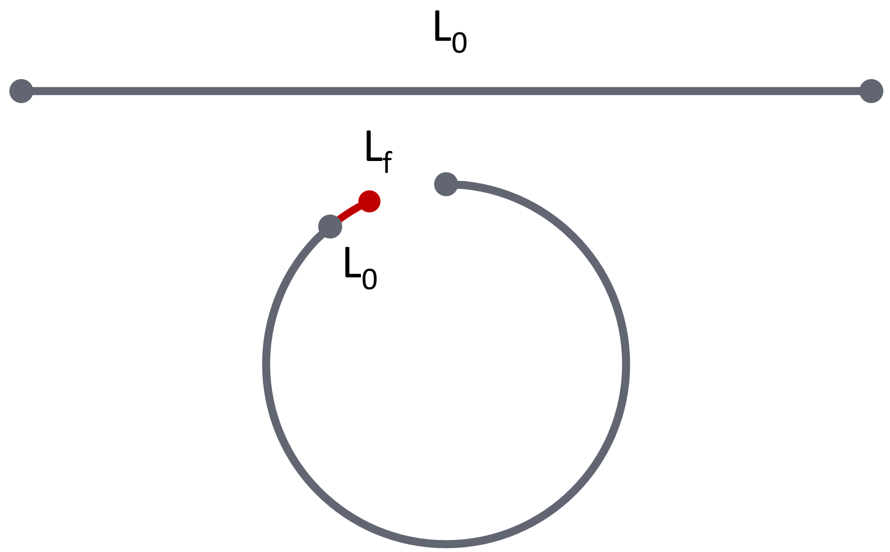
Deformazione di una corda sottile

Dipartimento di Ingegneria
Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- **Strain** è la misura della deformazione e rappresenta lo spostamento relative tra le particelle del corpo rispetto ad una lunghezza di riferimento.

- In un corpo continuo, il campo di deformazione è causato dalle forze applicate o dalla variazione di temperatura all’interno del corpo

- La relazione che lega sforzi a deformazioni è espressa attraverso equazioni costitutive es. legge di Hooke per materiali elastici-lineari



Deformazione di una corda sottile

DEFORMAZIONE E “STRAIN”

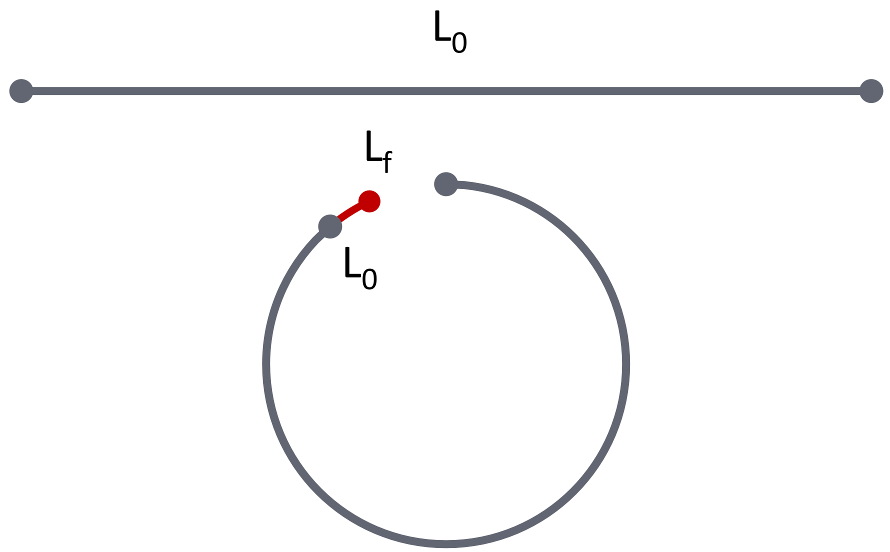
- **Strain** è la misura della deformazione e rappresenta lo spostamento relative tra le particelle del corpo rispetto ad una lunghezza di riferimento.

- La deformazione di un corpo può essere espresso nella forma di funzione ***x=F(X)***, *dove* ***X*** è la posizione di riferimento del corpo

- Questa definizione non distingue tra i moti rigidi (traslazioni e rotazioni) e variazioni nella forma e dimensione del corpo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}' - \boldsymbol{I}$$

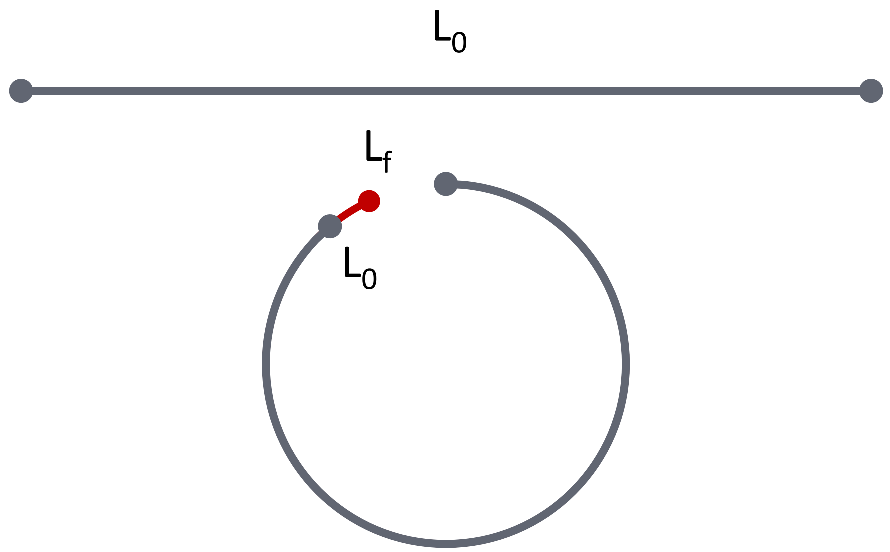
- Le deformazioni sono senza dimensioni (mm/mm)



Deformation of a thin rope

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- A seconda della grandezza delle deformazioni sono state sviluppate tre formulazioni specifiche:
  - deformazioni infinitesime
  - deformazioni finite
  - Grandi deformazioni (e/o grandi rotazioni)



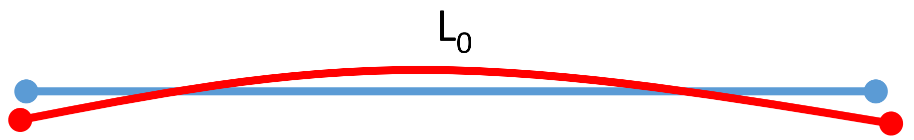
Deformation of a thin rope

MISURE DELLE DEFORMAZIONI (STRAIN)

- **Teoria delle deformazioni infinitesime (piccolo deformazioni)**
  - Anche detta teoria delle piccolo deformazioni, piccolo spostamenti, o piccolo gradient di sppostamento.

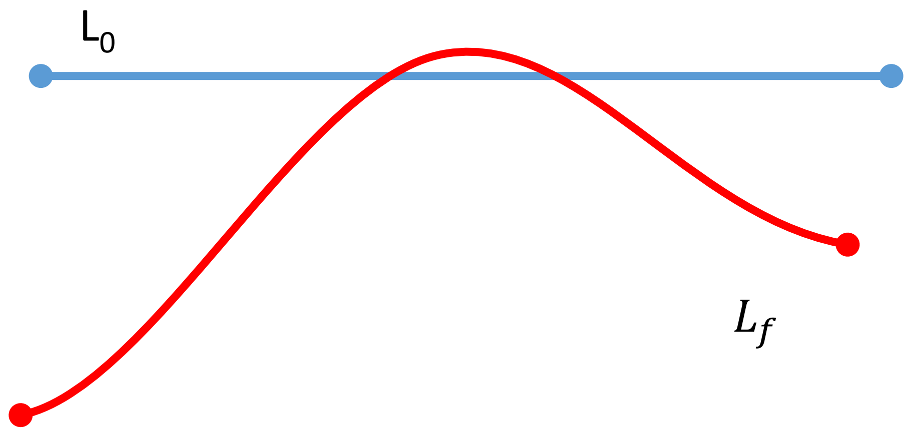
  - **Entramen le deformazioni e le rotazioni sono piccole**. La configurazione originale e quella deformata possono essere assuente di fatto identiche.

  - La teoria delle piccolo deformazioni è utilizzataper l'analisi di materiali elastici quali quelli di uso nell'ingegenria civile (cemento, rocce ma anche acciaio).



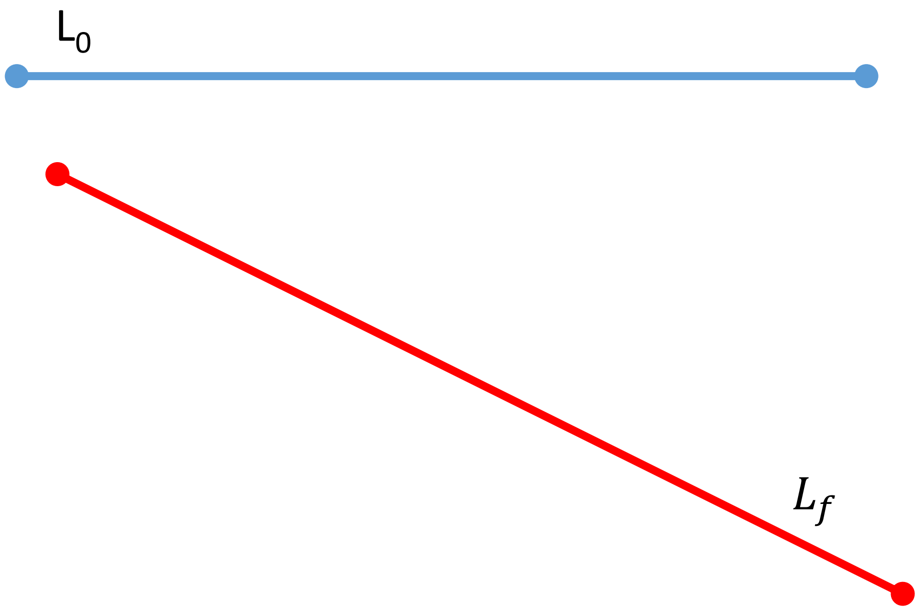
$$L_f = L_o + \Delta L$$

- **Teoria delle deformazioni finite**
  - Anche detta delle grandi deformazioni
  - Tratta i casi in cui sia le deformazioni sia le rotazioni sono arbitrariamente grandi. La configurazione originale e la deformata sono significativamente differenti.
  - Questo è il caso comune per elastomeri, materiali che si deformano plasticamente, fluidi, e tessuti biologici



Dipartimento di Ingegneria
Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- **Large strain theory**
  - *Large-displacement* or *large-rotation theory*, assume piccolo deformazioni ma grandi rotazioni e spostamenti.

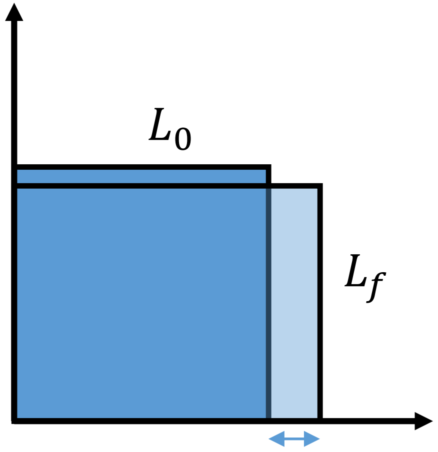


MISURE DELLE DEFORMAZIONI (STRAIN)

- In ogni teoria la definizione della deformazione è differente

- **Deformazione ingegneristica.** The la deformazione di Cauchy o ingegneristica è espresso come il rapport tra il rapporto tra l'incremento di spostamento e la lunghezza di riferimento fatta nella configurazione iniziale del corpo cui sono applicate le forze.

    - **Deformazione ingegneristica** di una elemento lineare sollecitato assialmente è data dalla variazione nella lunghezza per unità di lunghezza *L.* La deformazione normale è positive se le fibre del materiale sono allungate o negative se sono compresse



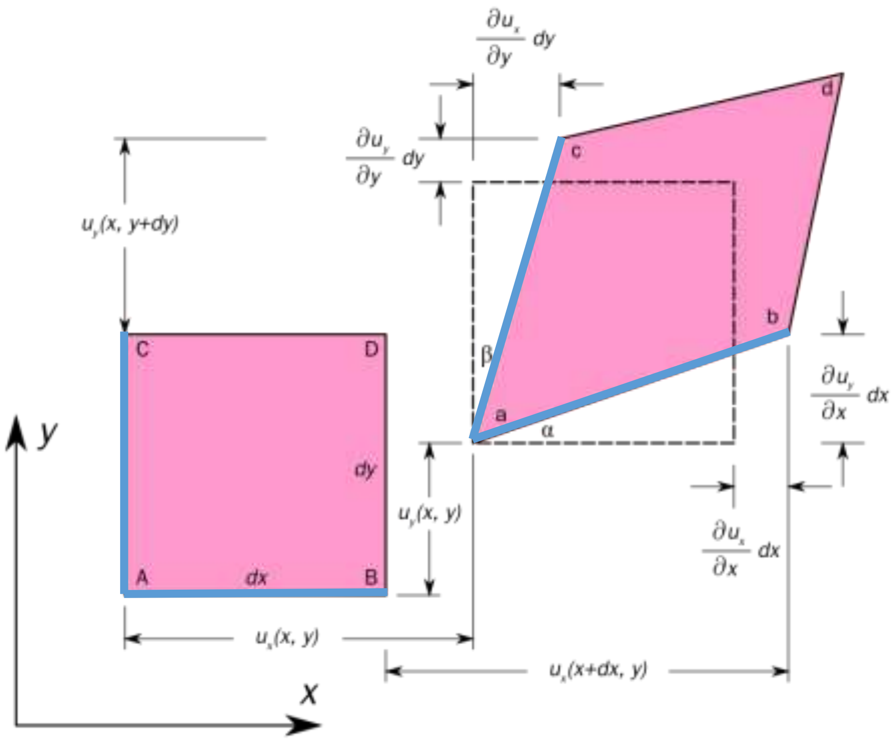
$$\varepsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

$$L_f \approx dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- In ogni teoria la definizione della deformazione è differente
  - **Deformazione ingegneristica a taglio:** è definite come la variazione dell'angolo tra le line AC e AB dell'elemento di materiale inizialmente retto

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$



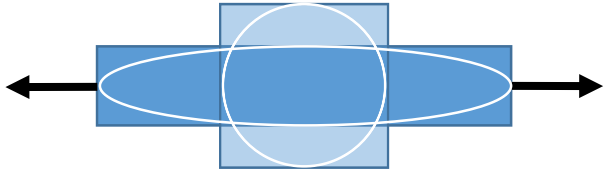
MISURE DELLE DEFORMAZIONI (STRAIN)

- Altre definizioni
  - Deformazione ingegneristica: $$\varepsilon_{eng} = \frac{\Delta l}{l_0}$$
  - Deformazione logartimica $$\varepsilon = \int \frac{dl}{l} = ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$
  - Deformazione di Green $$\varepsilon_G = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2}\right)$$
  - Deformazione di Almansi $$\varepsilon_G = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2 - l_0^2}{l^2}\right)$$

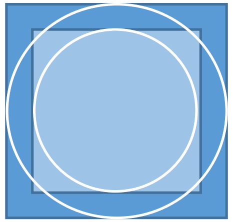
ESEMPI DI DEFORMAZIONE OMOGENEA

In un processo di deformazione omogenea le line rimango rette, e le linee parallele rimangono tali

- Deformazione uniforme

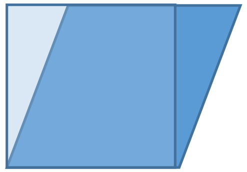


- Dilatazione pura

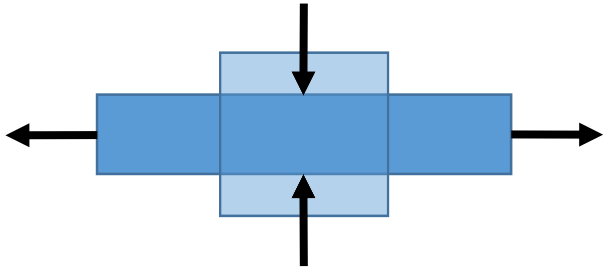


$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

- Taglio semplice



- Taglio puro



Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

TENSORE DELLE DEFORMAZIOI (deformazioni infinitesime). Uno stato tridimensionale di deformazione è descritto dal tensore

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Che la stesse proprietà del tensore degli sforzi (es. simmetrico, decomponibile in parte spefica e deviatorica, etc..)

Invarianti del tensore delle deformazioni:

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2$$

$$I_3 = det\left|\varepsilon_{ij}\right|$$

TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

DEFORMAZIONI PRINCIPALI.

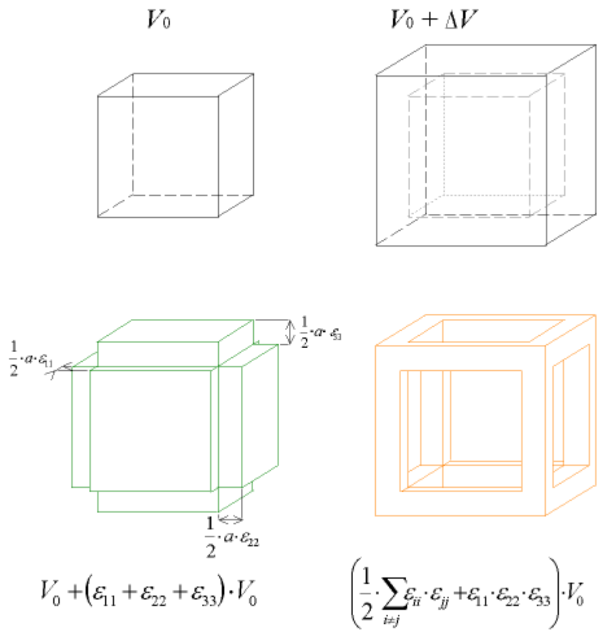
In ogni punto di un corpo deformato ci sono almeno tre piani, detti principali, con vettori normali detti direzioni principali dove il corrispondente vettore delle deformazioni è normale alle superfici e non vi sono deformazioni a taglio

Le tre deformazioni normali a questi piano sono le deformazioni principali

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

DEFORMAZIONE VOLUMETRICA. La *dilatazione* (ovvero la variazione relativa di volume) è la traccia del tensore deleldeformazioni:

$$\varepsilon_{kk} = \delta = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$



DEFORMAZIONI PRINCIPALI.

In ogni punto di un corpo deformato ci sono almeno tre piani, detti principali, con vettori normali detti direzioni principali dove il corrispondente vettore delle deformazioni è normale alle superfici e non vi sono deformazioni a taglio

Le tre deformazioni normali a questi piano sono le deformazioni principali

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

DEVIATORE DELLE DEFORMAZIONI. Il tensore delle deformazioni, cosi come il tensore degli sforzi di Cauchy, può essere decomposto in parte sferica e deviatorica. Il deviatore tiene conto della *distorsione*.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\varepsilon'_{ij} =\equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \delta & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_y - \delta & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_z - \delta \end{bmatrix}$$

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

DEFORMAZIONE OTTAEDRICA.

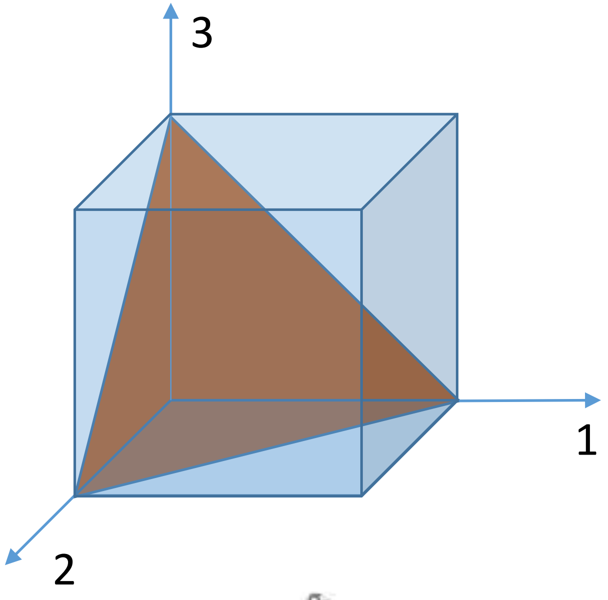
Ad ogni stato di sforzo (e deformazione) complesso è caratterizzato attraverso tre sforzi (deformazioni) principali.

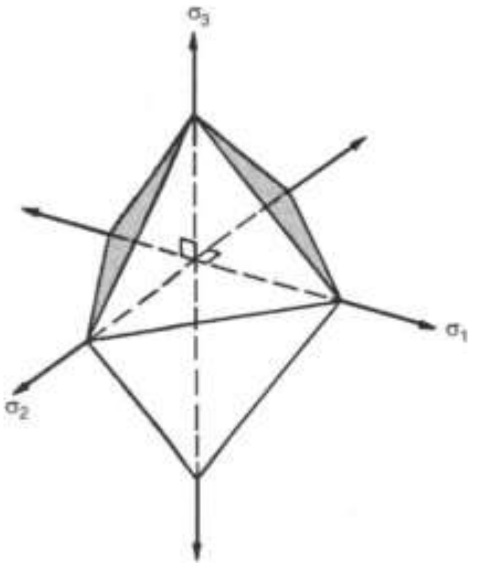
Allo stato di sforzo (deformazione) principale sono associati i cosiddetti piani ottaedrici, ognuno dei quali taglia il cubetto elementare a partire dai vertici

L'insieme degli otto piani definisce un ottaedro

Gli sforzi (e le deformazioni) normali agenti sui piani ottaedrici sono uguali in valore e sono volumetrici: non distorcono l'ottaedro

Allo stesso modo gli sforzi (e le deformazioni) di taglio agenti sui piani sono identiche e tendono a cambiare la forma ma non il volume



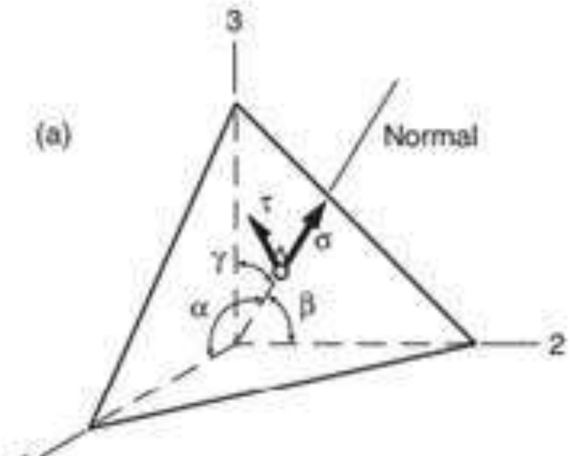


DEFORMAZIONE OTTAEDRICA.

Un piano ottaedrico è quello la cui normale stacca angoli uguali con le tre direzioni principali.

La deformazione (ingegneristica) a taglio sul piano ottaedrico è detta "deformazione ottaedrica" ed è definite come:

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$



TENSORE DELLE DEFORMAZIONI

DEFORMAZIONE PIANA.

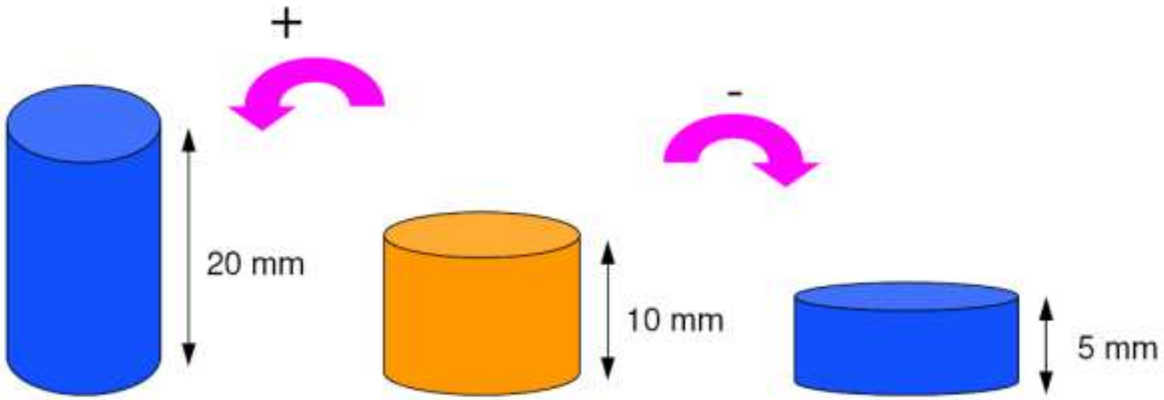
È la condizione per cui non ci sono component di taglio in nessun piano nomale al piano considerate e la deformazione normale ad esso è zero

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DEFORMAZIONE ANTIPLANARE.

Questo stato di deformazione si realizza quando il campo di spostamenti è nullo nel piano considerate ma non nei piani normali e nella direzione perpendicolare al piano

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



$$e_1 = \frac{20-10}{10} = 1. \Rightarrow 100\%$$

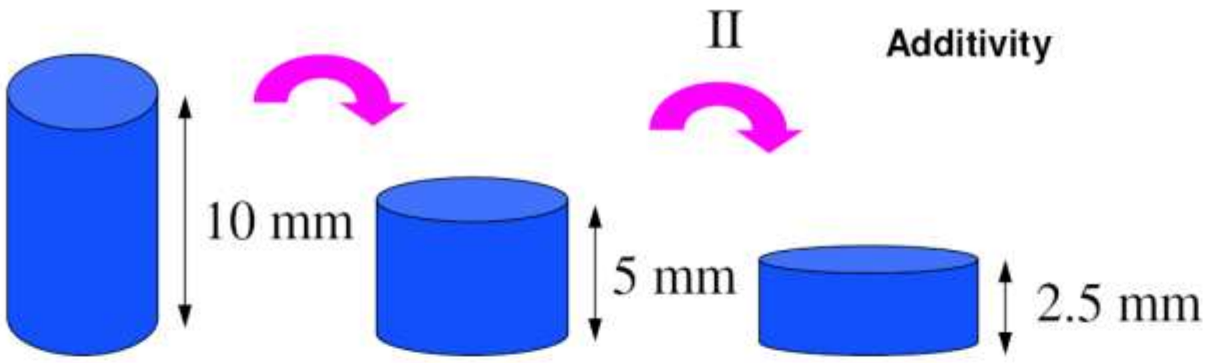
$$e_2 = \frac{5-10}{10} = -0.5 \Rightarrow -50\%$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = Ln\left(\frac{20}{10}\right) = 0.693 \approx 0.7$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = Ln\left(\frac{5}{10}\right) = -0.693 \approx -0.7$$

$$\bar{\varepsilon} = Ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

$$e = \frac{\Delta l}{l_0}$$



$$e_1 = \frac{5-10}{10} = -0.5 \qquad e_2 = \frac{2.5-5}{5} = -0.5 \qquad \bar{\varepsilon}_1 = Ln\left(\frac{5}{10}\right) = -0.693 \qquad \bar{\varepsilon}_2 = Ln\left(\frac{2.5}{5}\right) = -0$$

$$e_{tot} = \frac{2.5-10}{10} = -0.75 \qquad e_1 + e_2 = -1.0 \qquad \bar{\varepsilon}_{tot} = Ln\left(\frac{2.5}{10}\right) = -1.3863 \qquad \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 = -1.3863$$

$$\boxed{e_1 + e_2 \neq e_{tot}} \qquad \boxed{\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_{tot}}$$

VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE (STRAIN RATE)

Engineering strain rate

$$\dot{\varepsilon}_{eng} = \frac{d\varepsilon_{eng}}{dt} = \frac{d\left(\frac{l_f - l_0}{l_0}\right)}{dt} = \frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} = \frac{v}{l_0}$$

True strain rate

$$\dot{\varepsilon} == \frac{d\left[ln\left(\frac{l}{l_0}\right)\right]}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = \frac{v}{l}$$

LETTURE SUGGERITE

Dipartimento di Ingegneria Civile e Meccanica
Università di Cassino e del Lazio Meridionale

- http://www.mech.utah.edu/~brannon/public/Mohrs_Circle.pdf
- Schaum's Outline of Strength of Materials, Fifth Edition (Schaum's Outline Series) Fifth (5th) Edition Paperback – September 12, 2010
- Strength of Materials (Dover Books on Physics) Reprinted Edition by J. P. Den Hartog, ISBN-10: 0486607550