



Dipartimento di Ingegneria
Civile e Meccanica
UNIVERSITÀ DI CASSINO E DEL LAZIO MERIDIONALE

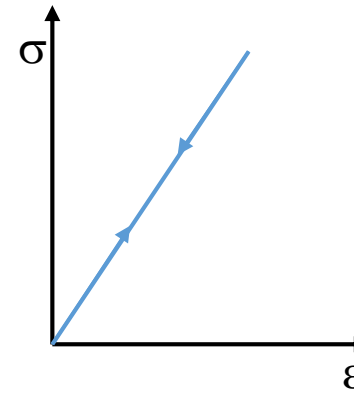
Comportamento meccanico dei materiali

Lecture 3 – Leggi costitutive

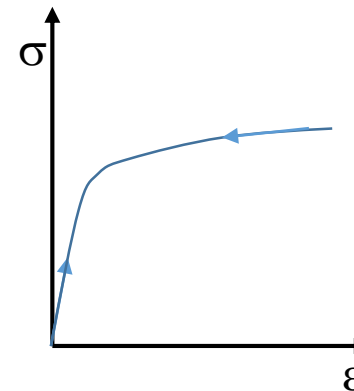
- Nella meccanica dei materiali, la legge costitutiva è la relazione che lega sforzi a deformazioni
- Si stabilisce eseguendo test sperimentali per stati di sollecitazione semplice.
- La prova di trazione uniassiale è il test preferito per sondare la risposta del materiale e ottenere informazioni sulla natura della legge costitutiva.
- In generale, i materiali mostrano un comportamento costitutivo che può essere classificato sotto le seguenti classi principali

- **Materiale elastico.** La deformazione si produce nel materiale immediatamente quando viene applicata la sollecitazione.
- La deformazione viene completamente recuperata quando lo stress (o il carico) viene rimosso.

- Elastic-lineare

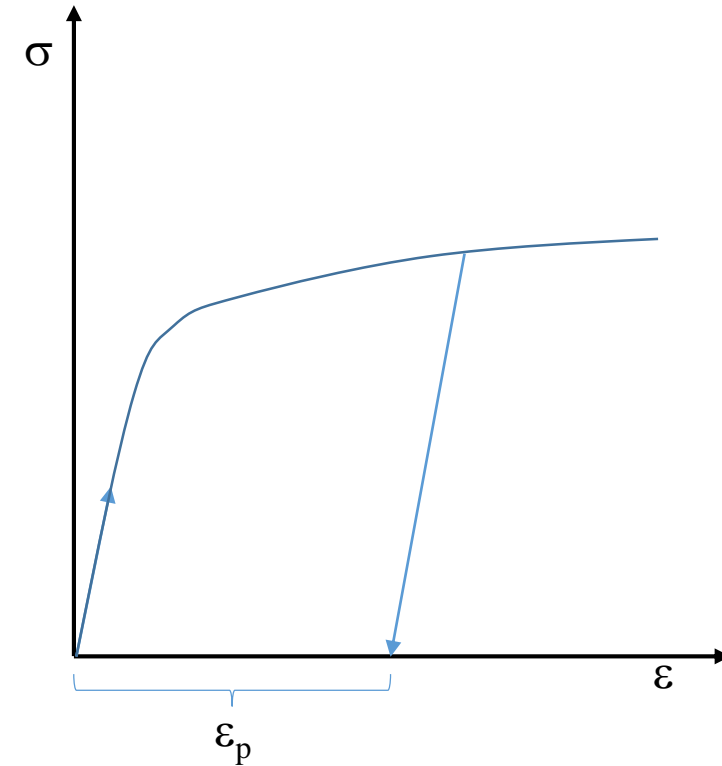


- Elastico non-lineare



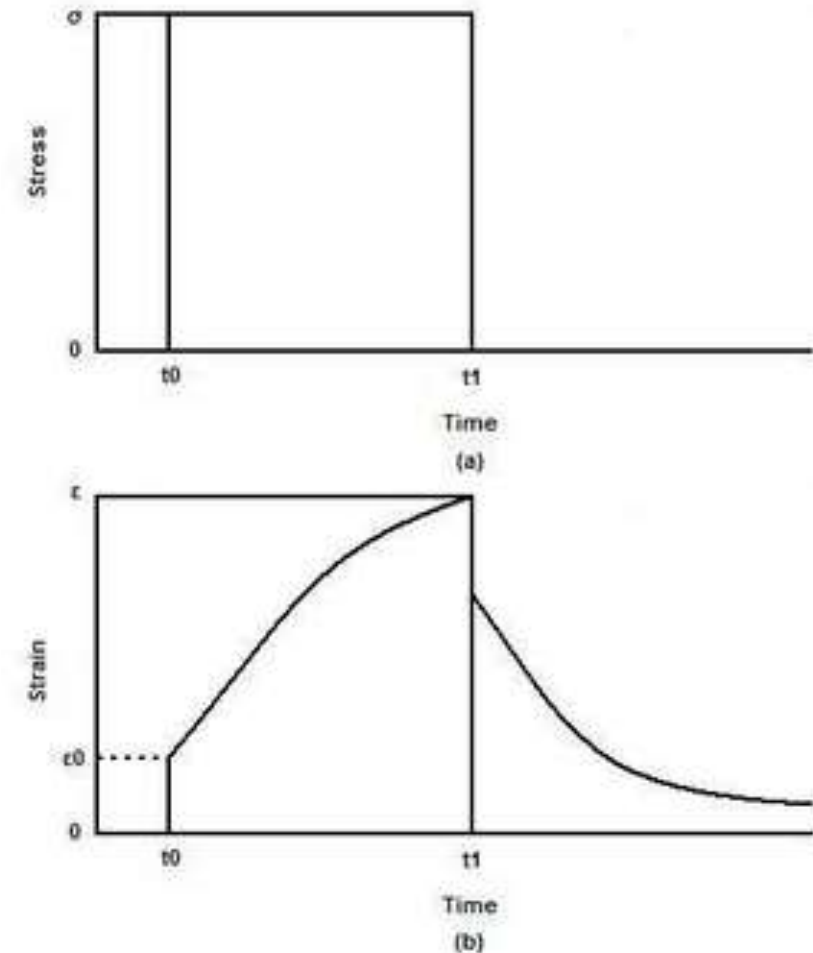
- Elastico-plastico. La deformazione si produce immediatamente non appena il carico è applicato. La deformazione è reversibile sino ad un valore dello sforzo. Aumentando lo sforzo la deformazione diviene permanente
- Il comportamento elastico non lineare e elastico-plastico non possono essere discriminate **se non effettuando uno scarico parziale**

$$\varepsilon_T = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

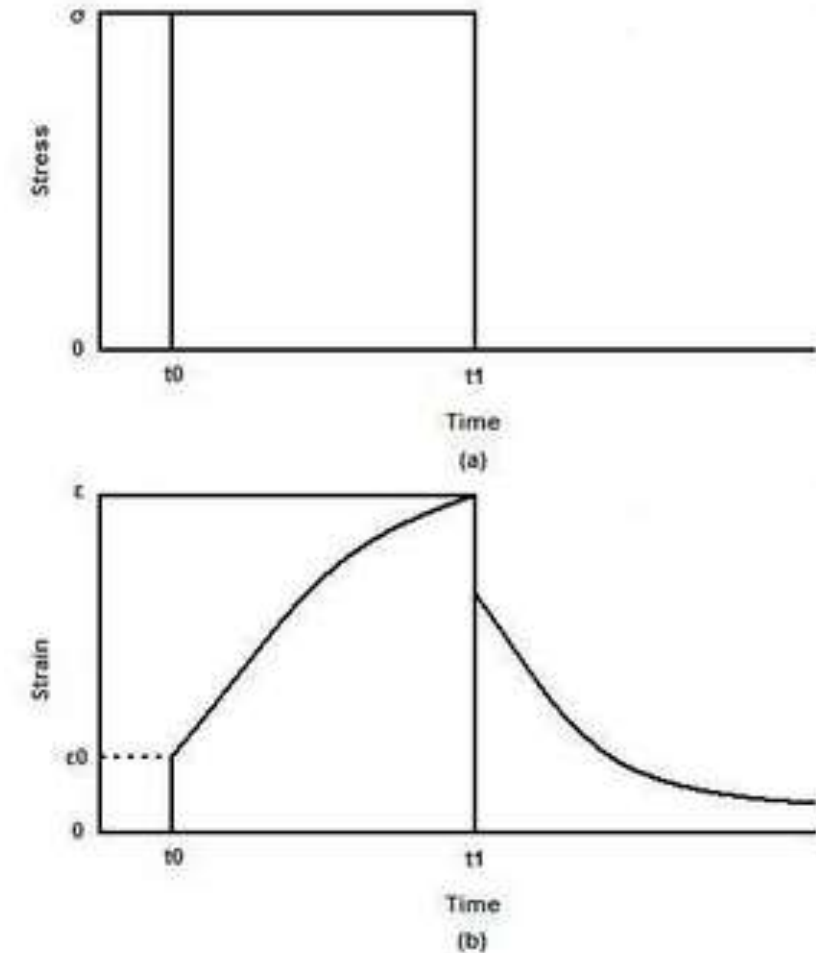


- Materiale elastico-visco-plastico. Quando il carico viene applicato è necessario un certo tempo perché si raggiunga l'equilibrio
- Le deformazioni inelastiche – dette viscosi – sono recuperabili o permanenti
- Se il carico viene rimosso, la deformazione elastica viene recuperata immediatamente mentre il recupero delle deformazioni viscosi richiede un tempo finito.

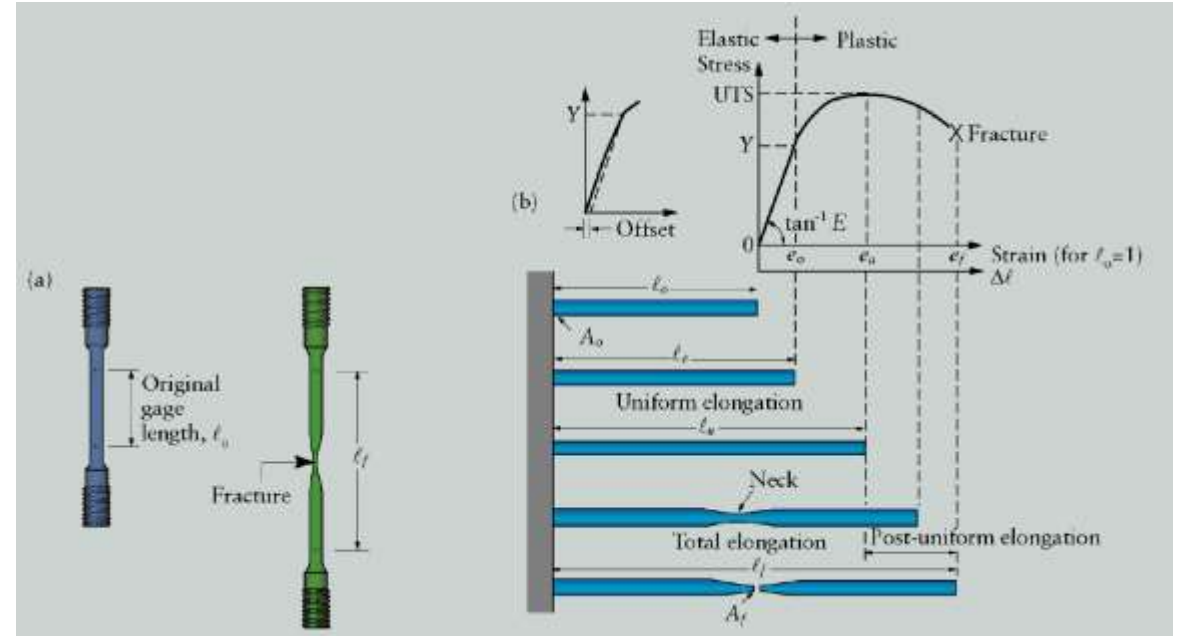
$$\varepsilon_T = \varepsilon_e + \varepsilon_v + \varepsilon_p$$



- La maggior parte dei materiali sono elastico-visco-plastici.
- Le deformazioni viscosi sono funzione del tempo e della temperatura e sono associate ai meccanismi dissipativi che si verificano nella microscala (attrito interno, ostacoli, ecc.) Che competono con il moto delle



- La risposta ad un carico di trazione uniassiale nei metalli e leghe mostra le seguenti caratteristiche:
 - Risposta lineare-elastica fino ad un valore limite di sollecitazione chiamato sforzo di snervamento;
 - Oltre la tensione di snervamento, si verifica una deformazione plastica, la risposta sforzo-deformazione non è lineare (incrudimento): l'allungamento è ancora uniforme.
 - Nei materiali duttili, alla UTS (sforzo di trazione estremo, o *ultimate tensile stress*) l'allungamento non è più uniforme: si sviluppa il necking.
 - Oltre l'UTS, la deformazione plastica è sempre più localizzata nella regione della strizione fino a quando si verifica il cedimento



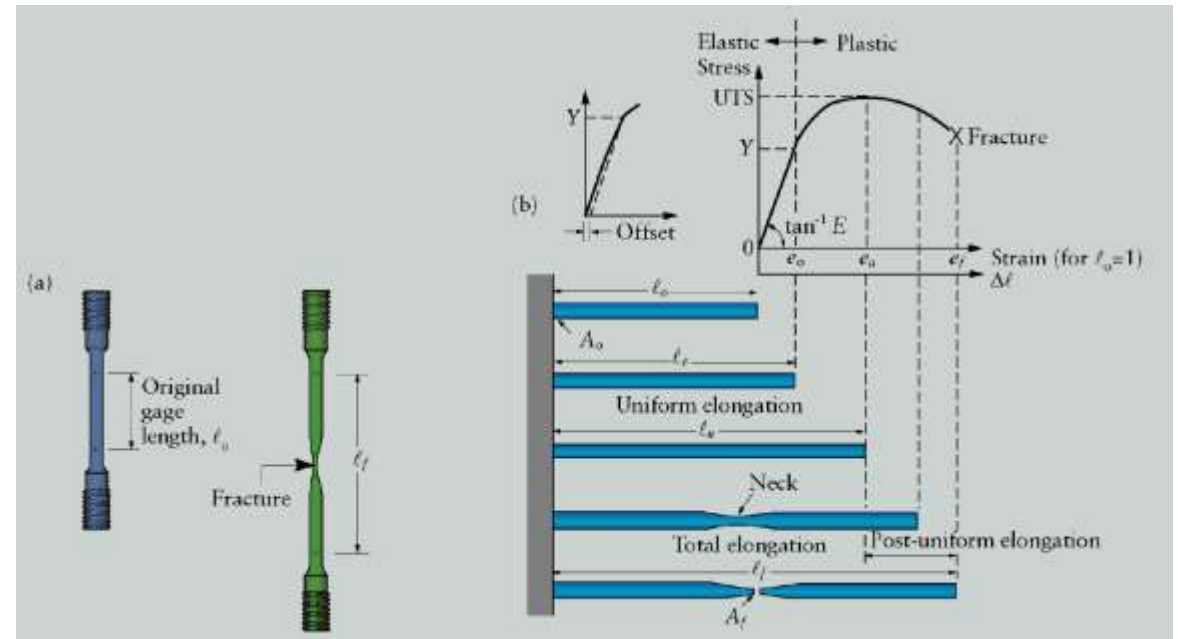
- La risposta di carico di trazione monoassiale. Dal punto di vista costitutivo, si assume la decomposizione additiva delle deformazioni:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p$$

- Una buona stima della deformazione plastica al necking è data da Bridgman,

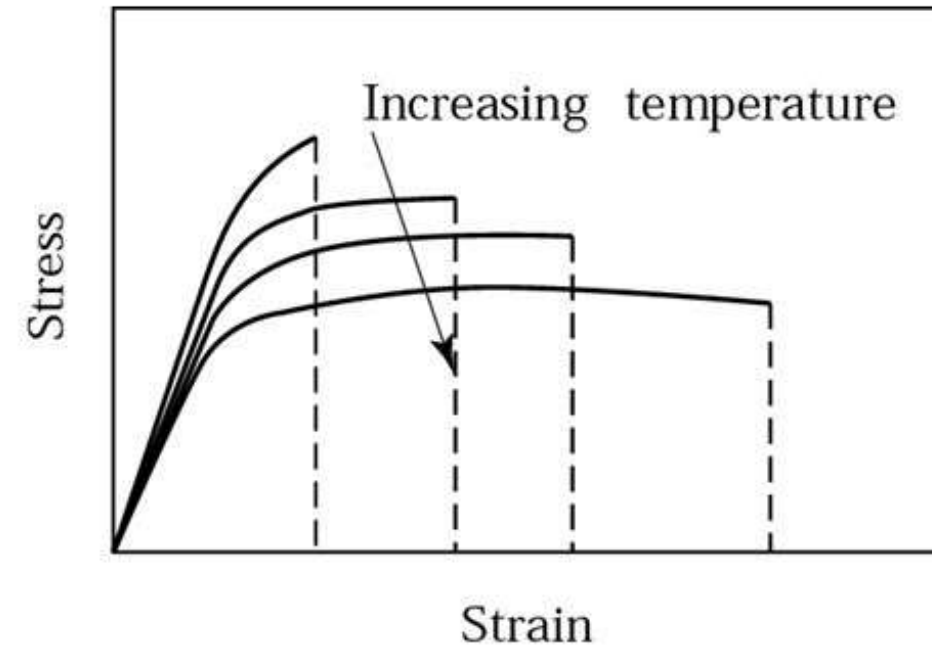
$$\varepsilon_p \cong 2 \ln \left(\frac{A_0}{A_f} \right)$$

- Questa espressione è ottenuta dall'assunzione di conservazione del volume plastico

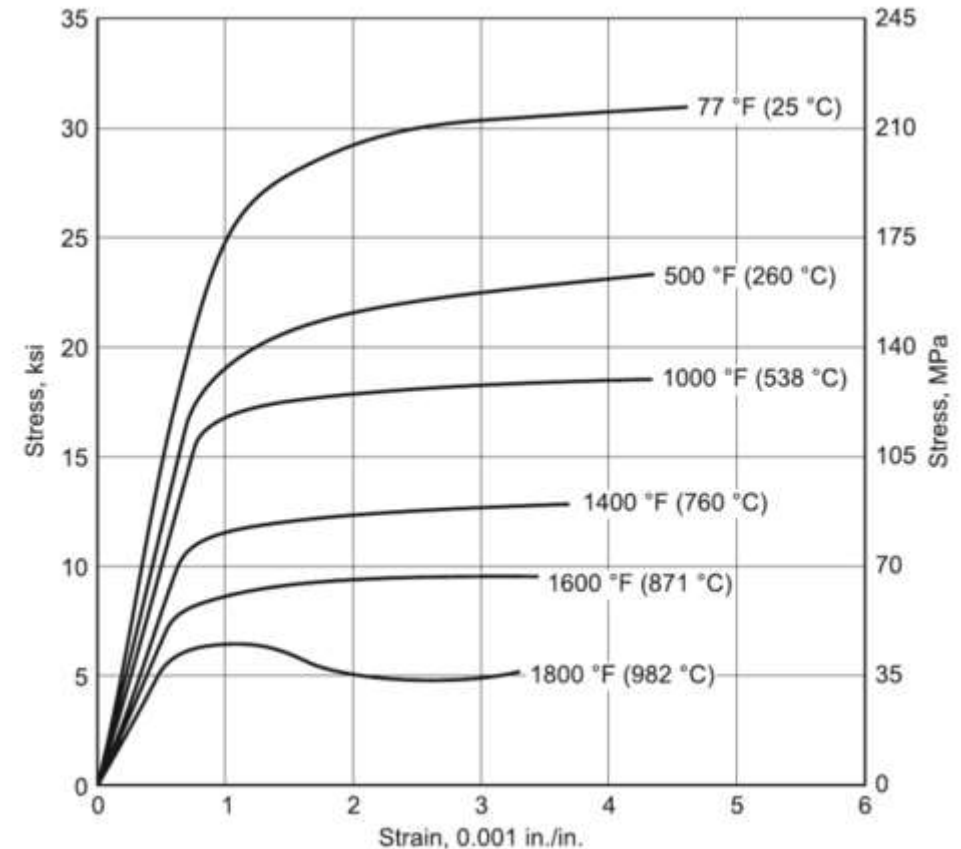


- La risposta di sforzo-deformazione uniassiale di metalli e leghe dipende dalle variabili esterne:
- **Temperatura**
- **Velocità di deformazione**

- La risposta di sforzo-deformazione uniassiale di metalli e leghe dipende dalle variabili esterne:
- **Temperatura**
 - Da un punto di vista molto generale, l'aumento della temperatura provoca la riduzione del carico di snervamento e un aumento della duttilità (sforzo in caso di guasto)

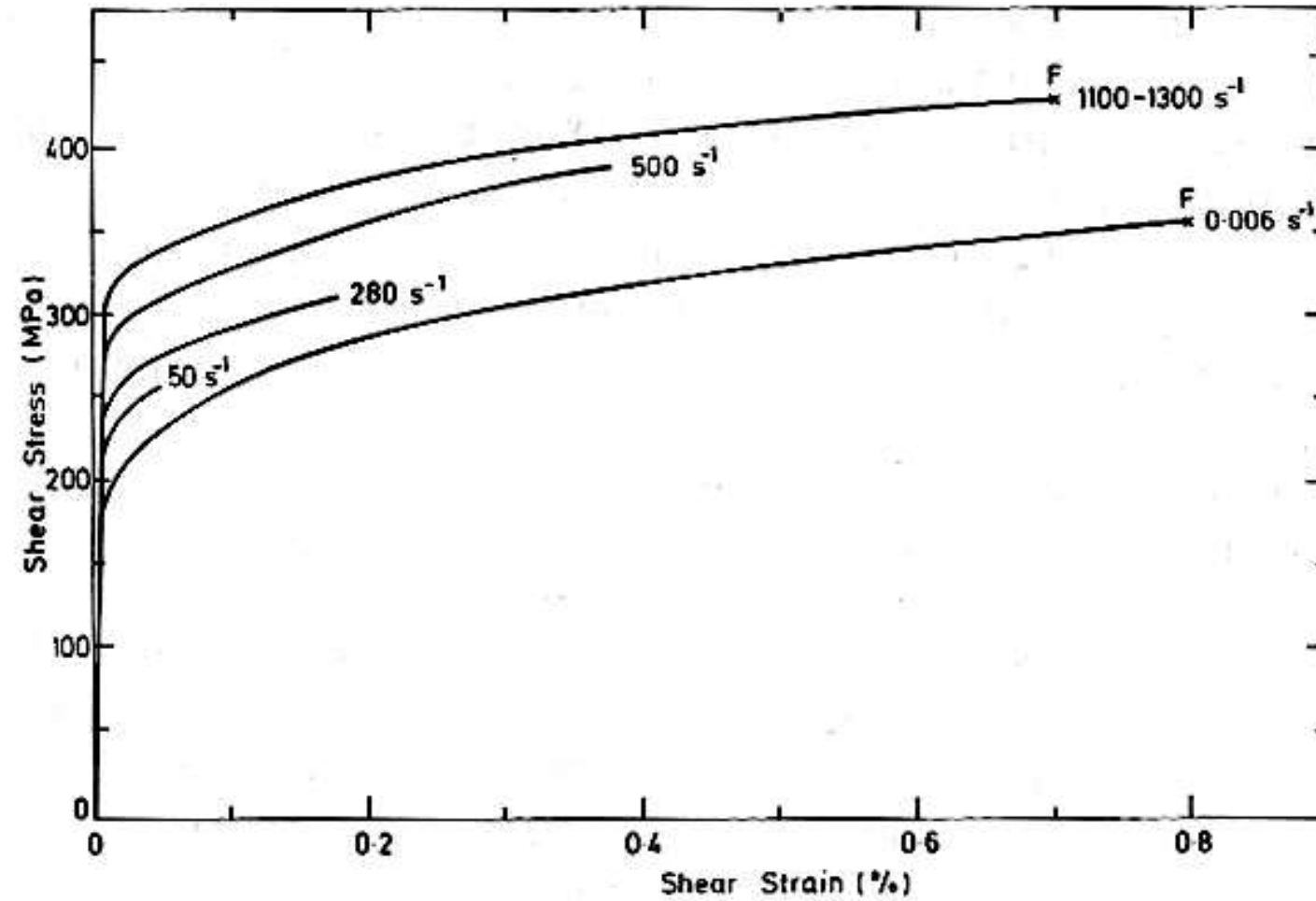


- Aumentando la temperatura, il comportamento viscoso diventa più rilevante: il modulo Young dipende dal rateo di carico.
- In generale, un aumento della temperatura aumenta la tenacità del materiale
- A temperatura elevata, l'ossidazione e l'invecchiamento possono verificarsi causando infragilimento materiale e drammatica riduzione della duttilità.

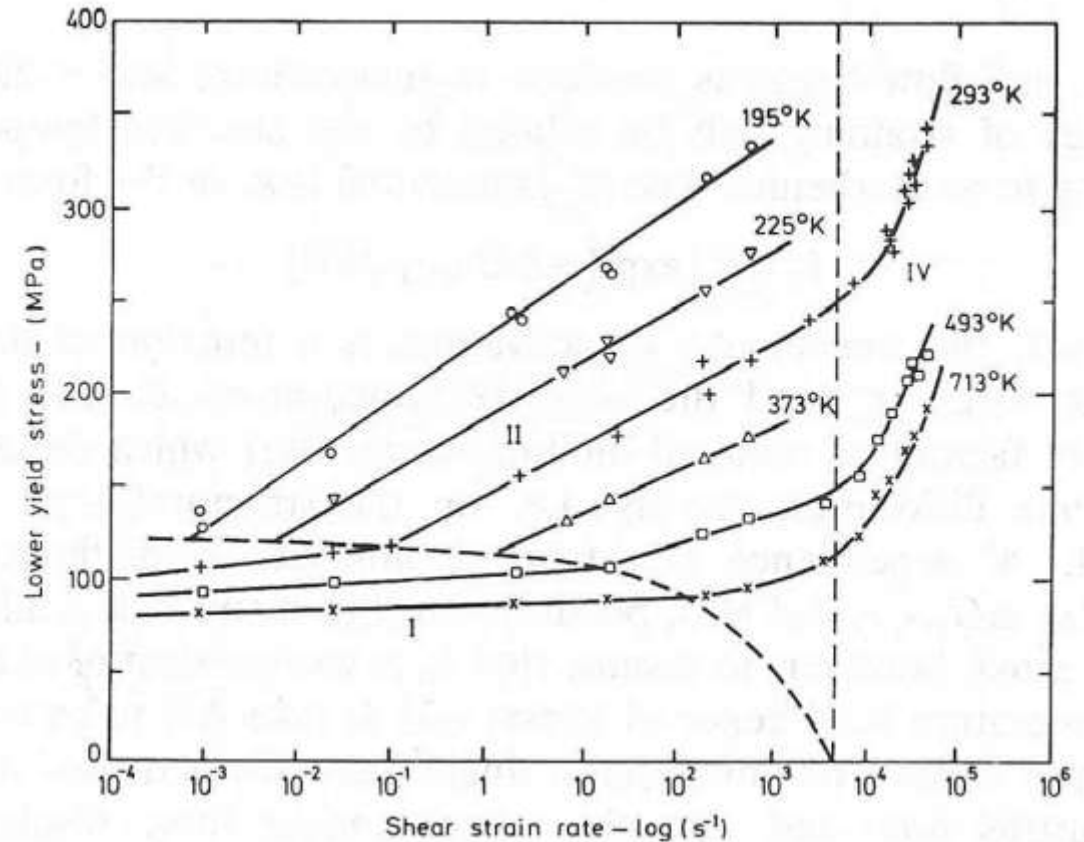


- Poiché la risposta del materiale è di natura viscosa, la velocità di deformazione ha un effetto sulla curva di flusso del materiale.
- Aumentando la velocità di deformazione:
 - Aumenta il carico di snervamento
 - Si modifica la pendenza della curva di incrudimento
 - Cambia la deformazione a rottura

- Esempio. titanio



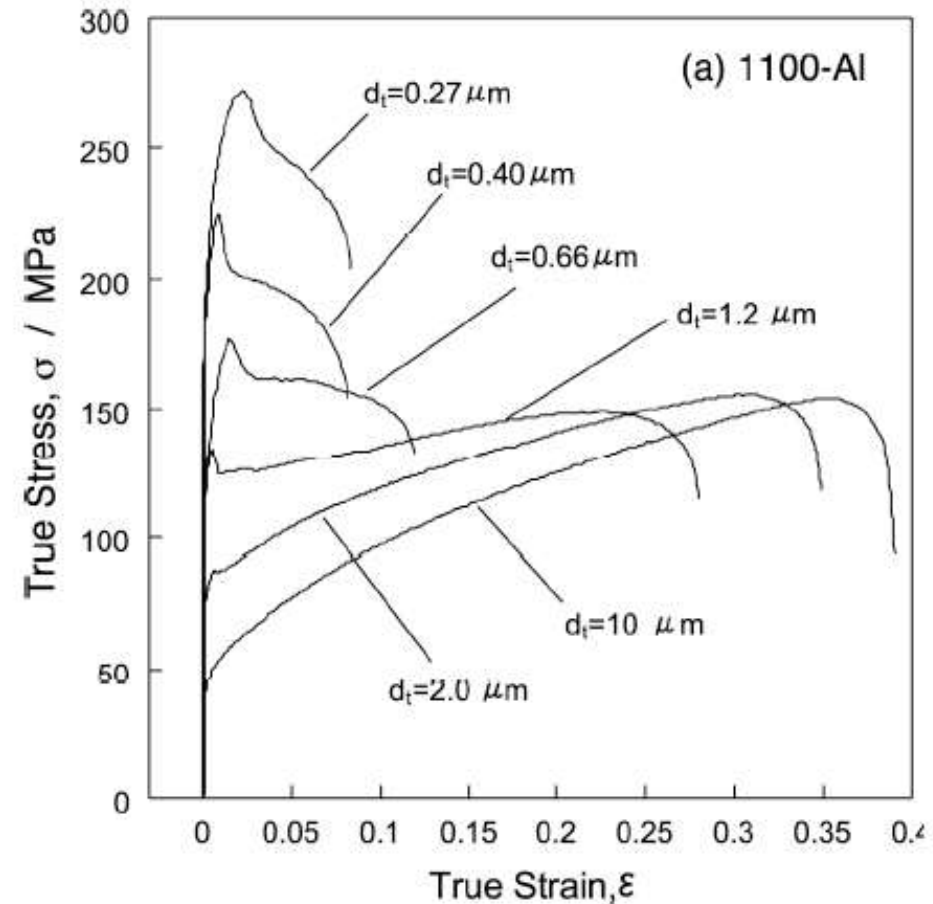
- La velocità di deformazione e la temperatura hanno un effetto competitivo sulla risposta del materiale.
- Per quanto riguarda la tensione di snervamento:
 - Regione I: debole dipendenza di temperatura, e effetto strain rate assente
 - Regione II: dipendenza lineare dal logaritmo dello strain rate
 - Regione III: dipendenza lineare dallo strain rate



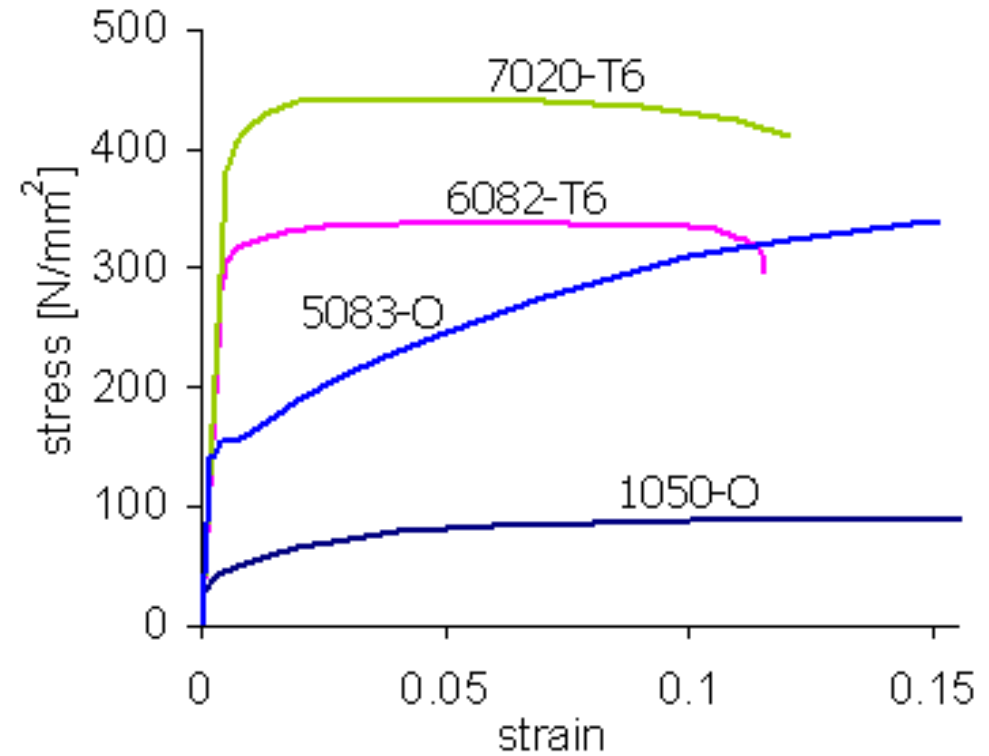
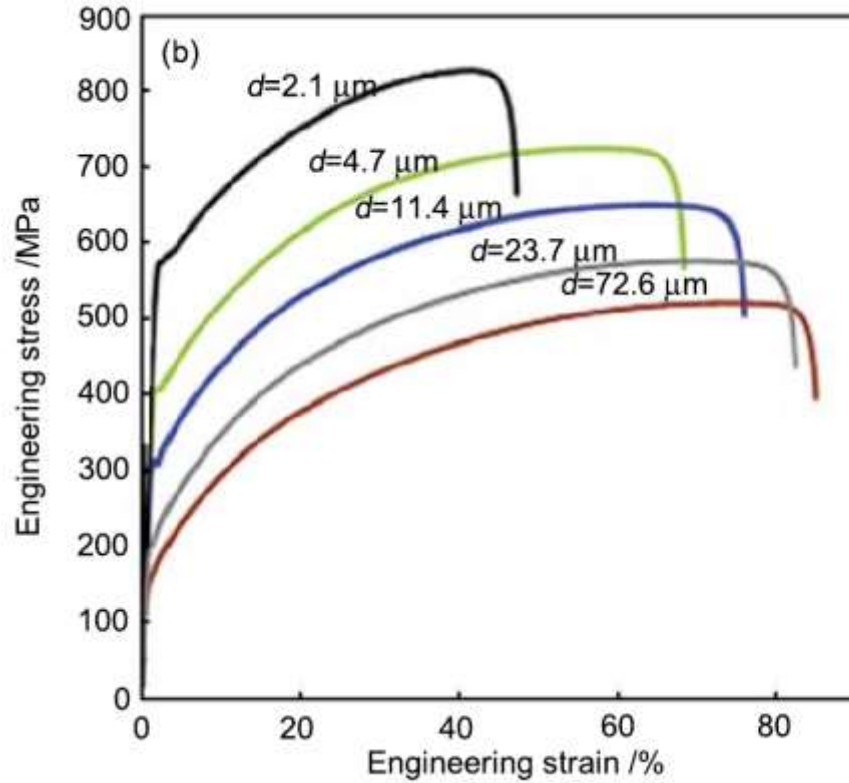
- La tensione di snervamento dipende dalla dimensione del grano
- L'effetto è più evidente nei metalli puri
- L'effetto è descritto dalla nota legge di Hall-Petch:

$$\sigma_Y = \sigma_0 + \frac{k}{\sqrt{d}}$$

- Riducendo la dimensione del grano lo snervamento aumenta ma si riduce anche la deformazione di necking: la duttilità del materiale progressivamente si riduce.



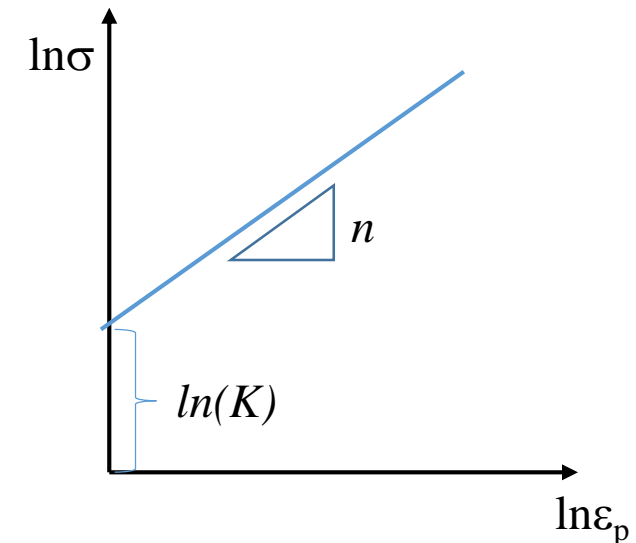
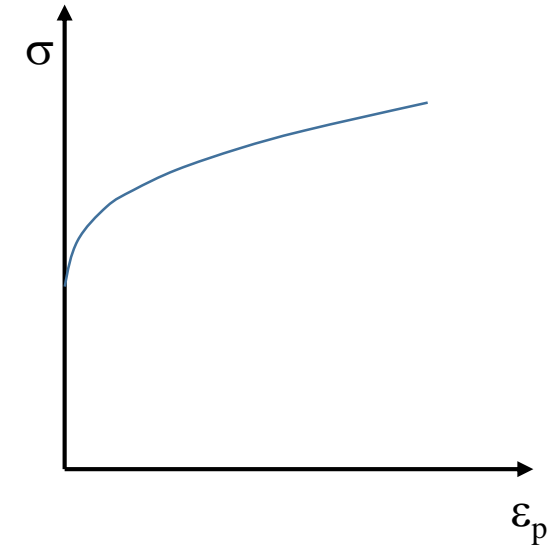
- Effetto degli elementi in lega



- La curva di flusso è solitamente espressa da una legge di potenza,

$$\sigma(\varepsilon_p) = K\varepsilon_p^n$$

- Questa espressione descrive abbastanza bene la risposta di diverse classi di metalli e leghe: ma solo in termini di stress ingegneristico rispetto alla deformazione ingegneristica! (funziona meno bene in termini di tensione vera vs def. logaritmica)
- I vantaggi di questa espressione sono:
 - Solo due parametri che possono essere facilmente determinati mediante adattamento lineare sul piano sforzo-deformazione(log-log)
 - L'esponente di incrudimento è la pendenza della retta nel diagramma doppio log.



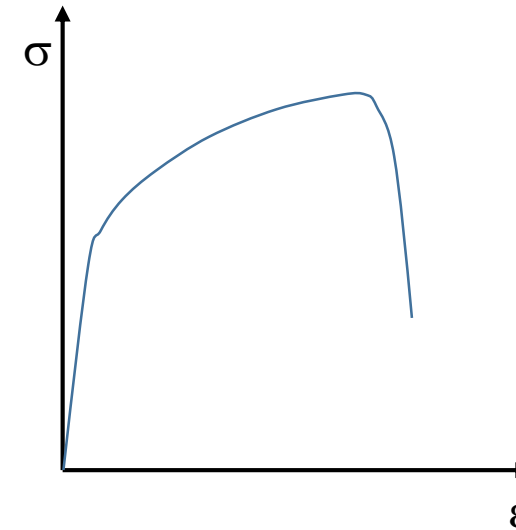
L'esponente di incrudimento ha anche il significato della deformazione plastica in condizione di strizione incipiente (onset necking)

- Condizione di Considère all'incipiente strizione :
 - Durante la deformazione in trazione la sezione netta resistente si riduce (per effetto della contrazione laterale). Di conseguenza il carico necessario alla deformazione deve diminuire
 - Analogamente, durante la trazione il materiale incrudisce e per tanto il carico necessario per la deformazione deve aumentare
 - Alla strizione i due effetti compensano (sono uguali)

$$\varepsilon_p = \varepsilon_u \rightarrow \sigma = \sigma_u$$

Aumento per incrudimento: $d\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} d\varepsilon_p$

Riduzione dello sforzo a seguito della riduzione dei area: $d\sigma = \frac{d\sigma}{dA} dA = \frac{d}{dA} \left(\frac{P}{A} \right) dA = \frac{P}{A} \left[-\frac{dA}{A} \right] = \sigma d\varepsilon_p \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \right) \Big|_{\varepsilon_p = \varepsilon_u} = \sigma_u$



- Pertanto sostituendo:

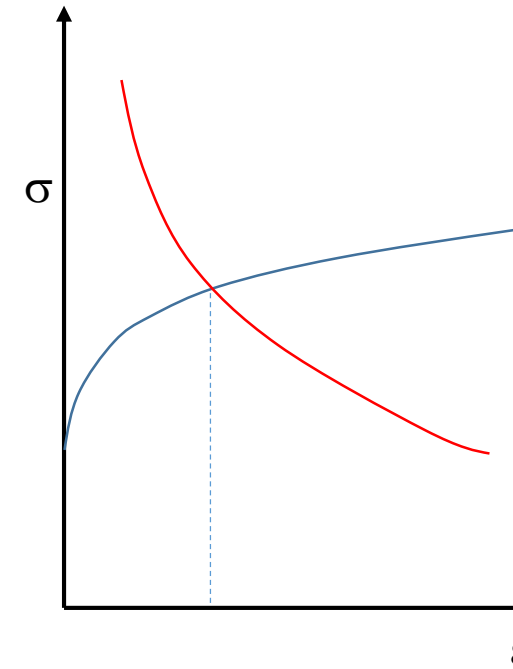
$$\varepsilon_p = \varepsilon_u \rightarrow \sigma_u = K\varepsilon_u^n$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_u \rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = Kn\varepsilon_u^{n-1} = \sigma_u$$

$$Kn\varepsilon_u^{n-1} = K\varepsilon_u^n$$

$$n = \varepsilon_u$$

- L'esponente di incrudimento è il valore della deformazione plastica alla strizione!
- Per una legge di flusso plastico qualunque, il punto di strizione si trova incrociando la legge di flusso con la sua derivata



- La relazione di Ramberg–Osgood fu proposta per descrivere la relazione non lineare tra sforzi e deformazioni nel regime prossimo allo snervamento
- E' particolarmente utile per metalli e leghe che incrudiscono con una transizione dolce dal regime elastic a quello elastic-plastico.
- L'espressione fornisce la deformazione totale in funzione dello sforzo è data
- Come la legge di potenza funziona bene per interpolare dati di trazione in forma di grandezze ingegneristiche

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^m$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^{m-1} \quad \sigma \geq \sigma_Y$$

- Un buon candidato per una espressione per la legge di flusso plastic deve poter prevedere la saturazione dello sforzo per grandi deformazioni

- Una espressione molto efficace è quella di Voce:

$$\sigma = \sigma_Y + R[1 - \exp(-\varepsilon_p/b)]$$

- Se necessario è possibile aggiungere più termini

$$\sigma = \sigma_Y + \sum_{i=1}^n R_i[1 - \exp(-\varepsilon_p/b_i)]$$

- Oggi, con l'uso dei FEM non c'è più la necessità di disporre di una espressione matematicamente semplice

- Nei FE; la legge di flusso può essere data in forma tabulare o attraverso una subroutine

- Il limite principale della legge di Potenza è che prevede sforzo infinito per deformazione infinita: questo è non corretto dal punto di vista fisico.

- Leggi di flusso plastic che contemplano l'effetto della temperature e della velocità di deformazione

- Cowper and Symonds:
$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^m) \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^{1/q} \right]$$

- Johnson and Cook:
$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^m) \left[1 + C \log \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^m \right]$$



- Brnic, Josip. Analysis of Engineering Structures and Material Behavior. John Wiley & Sons, 2018.